Formelsamling för TMV120 : HT-10

Följande är en lista över saker man 'ska kunna' till tentan. Det ideala är förstås att man ska förstå allting på listan så att man kan svara på teorifrågor, och att man kan tillämpa kunskapen till att lösa räkneuppgifter, som utgör majoriteten av tentan.

Fakta grupperas i fem kategorier :

D : definition. Du ska kunna definitionen av det nämnda begreppet.

F : formel. Oftast en algebraisk formel som man ska kunna utantill eller kunna härleda.

M : en rutinmetod för att lösa en speciell typ av problem, som man ska kunna tillämpa.

S : en sats vars formulering man ska kunna utantill och kunna återge.

SS : en sats som man dessutom ska kunna bevisa.

SM 1.1

Algebraiska räknelagar : kommutativa, associativa och distributiva lagarna (D).

SM 1.2

Bråkräkningslagarna (S).

SM 1.3

Potenslagarna. Se också lagarna i avsnitt 1.6, 1.7 och 1.8.

SM 1.4

Räknelagar för olikheter.

SM 1.5

Absolutbeloppsfunktionen (D).

SM 1.9

Standardfaktoriseringarna (F).
Allmänna konjugatlagen (SS).
Binomialsatsen / Pascals triangel (S).

SM 2.2

Kvadratkomplettering (M).
Rötterna till en kvadratisk ekvation (F)

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

SM 2.5

Faktorsatsen (SS).
Polynomdivision (M).

C : P4

Definitionsmängd och väredmängd till en funktion (D).
Periodisk funktion (D).
Jämn och udda funktion (D).
Speglingssymmetrier och grafer (M : se boxen på s.29).

C : P5

Summa, produkt, kvot, sammansättning av funktioner (D).
$f(x) = \lfloor x \rfloor$, $f(x) = \lceil x \rceil$ (D).
$f(x) = \text{sgn}(x)$ (D).
Styckvis definierad funktion (D).

C : P7

En radian (D).
π radianer = 180 grader (SS).
Cosinus och sinus av en vinkel (D).
Definitionerna till de andra trigonometriska funktionerna i termer av sinus och cosinus (D).
Graferna till de trigonometriska funktionerna (F).
Följande lista av identiteter hos de trigonometriska funktionerna (SS) :

$$\begin{aligned}
\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta,\quad \cos(\theta+2\pi)&=\cos\theta,\\
\sin(-\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(-\theta)&=\cos\theta,\\
\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,\quad \sin(\pi-\theta)&=\sin\theta,\\
\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,\quad \sin(\pi+\theta)&=-\sin\theta,\\
\cos(\pi/2+\theta)=-\sin\theta,\quad \sin(\pi/2+\theta)&=\cos\theta,\\
\cos(\pi/2-\theta)&=\sin\theta,\\
\cos 0=\sin\pi/2&=1,\\
\cos\pi/2=\sin 0&=0,\\
\cos\pi=\sin\pi/2&=-1,\\
\cos\pi/3=\sin\pi/6&=1/2,\\
\cos\pi/6=\sin\pi/3&=\sqrt{3}/2,\\
\cos\pi/4=\sin\pi/4&=1/\sqrt{2},\\
\cos^2\theta+\sin^2\theta&=1,\\
\text{Sinuslagen : }\ \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}&=\frac{\sin C}{c}.
\end{aligned}$$

Följande identiteter ska du kunna men behöver ej kunna bevisa (F/S) :

$$\begin{aligned}
\cos(A\pm B)&=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B,\\
\sin(A\pm B)&=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B,\\
\tan(A\pm B)&=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B},
\end{aligned}$$

och de speciella fallen (F)

$$\begin{aligned}
\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1&=1-2\sin^2 A,\\
\sin 2A&=2\sin A\cos A,\\
\tan 2A&=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.
\end{aligned}$$

Dessutom (F/S)

$$\begin{aligned}\text{Cosinuslagen}: \ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C.\end{aligned}$$

C : Appendix I

Reella och imaginära delarna till ett komplex tal (D).
Addition och multiplikation av komplexa tal (F).
Absolutbeloppet av ett komplex tal (D/F).
Konjugaten till ett komplex tal (D).
Division av komplexa tal (F).
Arganddiagrammet (D).
Argumentet av ett komplex tal (D).
Polär representation av ett komplex tal (D).
Följande formler ska kunna bevisas (SS) :

$$\begin{aligned}|z|^2 &= z\overline{z},\\ |zw| &= |z||w|,\\ |z+w| &\leq |z| + |w|,\\ \arg(zw) &= \arg z + \arg w \ \text{ (De Moivres sats).}\end{aligned}$$

Man ska kunna formulera och tillämpa följande konsekvens av De Moivres Sats (S/F) :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Lay 1.1 - 1.2

Gausselimination (M).
De tre typer av lösningsmängd (S).
Underbestämda och överbestämda system (D).

C : 1.2

Gränsvärde (D)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Ensidiga gränsvärden (D)

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = L.$$

Ett existenskriterium (S)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) = L.$$

Regler för gränsvärdeberäkningar : Theorem 2 (S).

C : 1.3

Oändliga g.v. (lodräta asymptoter) (D)

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = +\infty \quad \text{(och andra teckenkombinationer).}$$

G.v. i oändlighet (D), antingen

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{(och andra teckenkombinationer)}$$

eller (vågräta asymptoter)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L.$$

G.v. i oändlighet för rationella funktioner : texten i marginalen på s.74 (S).

C : 1.4

Kontinuitet i en punkt (D).
Vänster/höger kontinuitet i en punkt (D).
Kontinuitet på en öppen/sluten intervall (D).
Theorems 6,7 (S).
Borttagbar singuläritet/diskontinuitet (Removable singularity/discontinuity) (D).
Theorem 9 : Mellanliggandevärdesatsen (S).
Theorem 8 : Extremvärdesatsen (S).

C : 2.1

Tangentlinjen till en kurva i en punkt (D).
Normallinjen till en kurva i en punkt (D).

C : 2.2

Derivatan till en funktion i en punkt (D/F).
Deriverbarhet på en öppen/sluten intervall (D).
(s.102) Härledning från själva definitionen av derivata av följande formel (SS) :

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N} \cup \{0\}). \tag{1}$$

Leibniznotationen (D).

C : 2.3

Theorems 2,3,4,5 : Reglerna för derivering av summor, produkter, reciprocals och kvot (SS).
Utvidgning av (1) till alla heltal n (via reciprocal rule) (SS).
Theorem 1 : Deriverbarhet $\Rightarrow$ Kontinuitet (SS).

C : 2.4

Theorem 6 : Kedjeregeln (F/S).

C : 2.5

Theorem 8 : Ett speciellt g.v. (SS)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2}$$

Theorem 9 : Härledning från (2) och definitionen av derivata att (SS)

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x. \tag{3}$$

Theorem 10 och boxen p s.123 : Härledning från (2), (3) och deriveringsreglerna av derivatorna till de andra trigonometriska funktionerna (SS).

C : 2.8

Växande/avtagande funktion i en punkt / på en intervall (D).
Theorem 15 : Rolles sats (SS).
Theorem 11 : Medelevärdesatsen (SS).
Theorem 12 : $f' > 0 \Rightarrow f$ växande, mm (SS).

C : 3.1

Ett-till-ett (injektiv) funktion (D).
Inversfunktion (D).
Grafen till en inversfunktion (M).
Boxen p s.166 : Egenskaper hos inversfunktioner (F/S).
Derivering av inversfunktioner via kedjeregeln (SS) :

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}. \tag{4}$$

C : 3.2

Allmänna potenslagarna s.170 (S).
Logaritmen (D) :

$$\log_a x = y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a^y = x.$$

C : 3.3

Logaritmlagarna s.171 (SS : ska kunna härledas från potenslagarna).
Theorem 1 : Härledning (SS) av logaritmens derivata från (4) ovan och (6) nedan

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x(\ln a)}, \quad \text{speciellt} \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Logaritmisk derivering (M).

C : 3.4

Definitionen av Eulertalet (D)

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n \tag{5}$$

och följdaktligen (SS)

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n.$$

Obs! Eq. (5) är en sats i boken (Theorem 6), inte en definition. Detta pga att boken börjar med logaritmen och definierar exponentialen som inversen till logaritmen, medan att jag gjorde tvärtom på mina föreläsningar.

Derivering av allmänna potensfunktioner (S) :

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a, \quad \text{speciellt} \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x. \tag{6}$$

Theorems 4,5 (SS).
Följande standardgränsvärden (SS) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

C : 3.5

Definitionsmängderna, värdemängderna och graferna till de invers-trignometriska funktionerna (S).
Följande derivator m.h.a. (4) och formlerna från avsnitt 2.5 (SS) :

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

C : 4.4

Absolut max/min (D).
Lokal max/min (D).
Kritisk punkt (D).
Singulär punkt (D).
Theorem 7 : Första derivatans test (S).

C : 4.5

Konkav upp/ner (D).
Inflektionspunkt (D).
Theorems 9,10 (S).

C : 4.6

Lodrät/vågrät/sned asymptot (D).
Asymptotisk uppförande hos rationella funktioner (S : boxen på s.247, som sammanfattar materialet om rationella funktioner från Kapitel 1).

C : 10.1

Cartesiskt koordinatsystem (D).
Högerhänt system (D).
Avståndsformeln via Pythagoras i två och tre dimensioner (SS).
Ekvationerna till en sfär och en cylinder (F).

C : 10.2

Addition av vektorer (D/F).
Standardbas $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ m.a.p. ett Cartesiskt koordinatsystem (D).
Skalärmultiplikation (D/F).
Egenskaper (S) hos skalärprodukten (s.574, efter Definition 3).
Skalär/vektor projektion (D/F).

C : 10.3

Vektor/kryss produkt (D/F).
Egenskaper (S) hos vektorprodukten (boxen på s.579).
Skalärtrippelprodukt (D), tolkning som volymen av ett parallelopiped (S) och beräkning som en determinant (F).

C : 10.4

Ekvationen (SS) till ett plan (boxen p s.586).
Parametriska (F) ekvationen till en linje i sina olika former (boxar p s.588-589).
Avståndet mellan en punkt och ett plan (SS).
Avståndet mellan en punkt och en linje (SS).