

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor, Matlab och SI hösten 2010 inkluderas.)

Ett facit kommer att mailas ut direkt efter tentan och fullständiga ösningar läggs ut på kursens webbsida senast 26/08.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv120/1011/

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm alla möjliga värden för $\sin x$ då $\cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$. (2p)

b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller $\frac{x^2-x}{x+1} > 0$? (2p)

c) Bestäm lutningen av tangentlinjen till kurvan $(y^3 + 3)x^2 - x^3y = 45$ i punkten $(3, 2)$. (2p)

d) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 8y + 7z = 11 \end{cases}$$
 (2p)

e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin(\sin x)} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-x+1}} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1+e^{-x}).$$

f) Antag att solen går ner över horisonten i 1/100 radianer per sekund. (3p)
Hur snabbt ökar längden av skuggan som kastas bakom en 2-meter lång gubbe i det ögonblick då solen är 30 grader över horisonten ?

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (0, 1, 1)$, $B = (-1, 3, 1)$ och $C = (-1, 5, 4)$.

a) Bestäm arean av triangeln med dess tre hörn i A, B och C. (2p)

b) Låt $\mathcal{P}$ vara planet som innehåller denna triangel. Bestäm ekvationerna (2p)
för de två planen $\mathcal{Q}_1$ och $\mathcal{Q}_2$ som är parallella med $\mathcal{P}$ och på avstånd 2 ifrån det.

c) Bestäm skärningspunkten mellan linjen genom A och C och planet (2p)
 $4x + 3y - 2z = -3$.

Var god vänd!

3. I denna uppgift ska du betrakta funktionerna $f_1(x) = x + 2 \cos x$ och $f_2(x) = x^2 + 2 \cos x$.
- a) Bestäm de största och minsta värdena som antas av $f_1(x)$ på intervallet $[0, \pi]$. (4p)
- b) Det kan visas att $f_2(x)$ är injektiv då $x \geq 0$. Bestäm $(f_2^{-1})'(\pi^2 - 2)$. (2p)
4. Skissera grafen till funktionen (6p)

$$f(x) = \ln(x^2 - 5) + x.$$

Ange definitionsområdet, alla asymptoter och lokala extrempunkter. Konkavitet/konvexitet behöver ej utredas !

5. En rektangulär reklamskylt ska tillverkas vars totala area är 120 cm² och som består av en rektangulär tryckt del, med 1cm marginaler över och under, och 1,5cm marginaler till vänster och höger. Bestäm skyltens dimensioner om arean av den tryckta delen ska maximeras. (6p)
6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)
- a) Om $f'(0) = -1$ och $f''(x) < 0$ för alla $x \geq 0$, då är $f(x)$ injektiv för $x \geq 0$.
- b) För alla $x, y > 0$ gäller $\ln(x + y) > \ln x + \ln y$.
- c) Om $f''(x)$ existerar för alla $x \in \mathbb{R}$ då måste $f'(x)$ vara kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$.
- d) För alla vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ gäller $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.
- e) Alla rötterna till ekvationen $z^3 - 3z^2 + 2z + 8 = 0$ uppfyller $|z| < 2$.
- f) Om $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Im}(z^2)$ och $\operatorname{Im}(z^4)$ är alla tre positiva, då måste $\operatorname{Im}(z^3)$ också vara positiv.
7. a) Formulera *mellanliggandevärdesatsen* för kontinuerliga funktioner. (2p)
- b) Bestäm en intervall av längd högst 1/4 som innehåller en lösning till ekvationen $x^2 = \frac{1}{4}(1 - x)^3$. Motivera väl varför du är SÄKER att din intervall innehåller en lösning. (2p)
- c) Förklara varför denna ekvation har BARA en lösning i intervallet $[0, \infty)$. (2p)

Lycka till!
/Peadar