

Tentamen 2011-08-24 : Lösningar

Q.1 (a) Sätt $u := \cos x$. Vi har en kvadratisk ekvation för u , som lyder $u^2 + 2u - 1 = 0$. Denna ekvation har de två lösningarna $u = -1 \pm \sqrt{2}$. Men $\cos x \in [-1, 1]$, så det finns bara en giltig lösning, nämligen $\cos x = -1 + \sqrt{2}$. Slutligen har vi då att

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \dots = \pm \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}.$$

(b) Vi har faktorerna $x, x-1$ och $x+1$. Gör man en teckentabell så ser man att man har ett jämnt antal negativa faktorer då $-1 < x < 0$ och då $x > 1$. Dvs olikheten gäller för dessa x -värden.

(c) Implicit derivering m.a.p. x ger att

$$2x(y^3 + 3) + 3x^2y^2y' - 3x^2y - x^3y' = 0,$$

som kan skrivas om till

$$y' = \frac{3xy - 2(y^3 + 3)}{x(3y^2 - x)}.$$

Insättning av $x = 3$, $y = 2$ och uträkning ger $y' = -4/27$.

(d) Systemet ges i matrisform av

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & 7 & 11 \end{array} \right).$$

Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_2 \mapsto -R_2, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_2,$$

erhåller vi trappstegsformen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Så z är en fri variabel och bakåtsubstitution leder till den allmänna lösningen

$$\left\{ \left(\frac{1}{3} + z, \frac{4}{3} - z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e.i) Låt $u := \sin x$. Om $x \rightarrow 0$ så går $u \rightarrow 0$ också. Så i termer av u , gränsvärdet lyder

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1.$$

ii. Huvudtermen i täljaren är x och huvudtermen i nämnaren är $\sqrt{2x^2} = \sqrt{2} |x|$. Så kvotet beter sig som $\frac{x}{\sqrt{2}|x|}$, och därmed går mot $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ då $x \rightarrow -\infty$.

iii. Sätt $u := e^{-x}$. Om $x \rightarrow \infty$ så går $u \rightarrow 0$. Kom ihåg standardgränsvärdet

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

Detta medför att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0,$$

ty den negativa exponentialen slår potensen av x .

(f) Låt θ beteckna solens vinkel över horisonten och x beteckna skuggans längd. Då gäller att $\tan \theta = 2/x$, dvs $x = 2 \cot \theta$. Derivera i båda leden m.a.p. tid så härleder vi att

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Det är givet att $d\theta/dt = -1/100$ rad/s. Vi är intresserade av ögonblicket då $\theta = 30^\circ = \pi/6$ rad. Eftersom $\sin(\pi/6) = 1/2$ så ser vi att, i detta ögonblick,

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{-2}{(1/2)^2} \right] \left(-\frac{1}{100} \right) = \frac{2}{25} \text{ m/s}.$$

Q.2 (a) Vi har $\vec{AB} = (-1, 2, 0)$ och $\vec{AC} = (-1, 4, 3)$ och beräknar en normal till planet enligt

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Triangelns area ges då av

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|\vec{n}\| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{49} = \frac{7}{2}.$$

(b) Planens ekvationer lyder $6x+3y-2z=d$ för ngt d . Punkten $A=(0,1,1)$ ligger på avstånd 2 från planen, som betyder att

$$2 = \left| \frac{6(0) + 3(1) - 2(1) - d}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{1-d}{7} \right|.$$

Därför är $1-d = \pm 2 \cdot 7 \Rightarrow d = 15$ eller $d = -13$. Så de två planens ekvationer lyder $6x+3y-2z=15$ resp. $6x+3y-2z=-13$.

(c) Linjen har riktningsvektor $\vec{AC} = (-1, 4, 3)$ och därmed består av alla punkterna $(-t, 1+4t, 1+3t)$, där $t \in \mathbb{R}$. Skärningspunkten erhålls genom insättning i planets ekvation, alltså

$$4(-t) + 3(1+4t) - 2(1+3t) = -3 \Rightarrow t = -2,$$

som innebär att skärningspunkten är $(2, -7, -5)$.

Q.3 (a) De kritiska punkterna till f_1 uppfyller

$$0 = f_1'(x) = 1 - 2 \sin x \Rightarrow \sin x = 1/2.$$

Därmed finns det två kritiska punkter inom intervallet $[0, \pi]$, nämligen $x_1 = \pi/6$ och $x_2 = 5\pi/6$. Vi jämför värdena i dessa punkter med värdena i ändpunkterna $x_0 = 0$ och $x_3 = \pi$. Vi har

$$f_1(x_0) = 2, \quad f_1(x_1) = \pi/6 + \sqrt{3}, \quad f_1(x_2) = 5\pi/6 - \sqrt{3}, \quad f_1(x_3) = \pi - 2.$$

Det största (resp. minsta) av dessa är $\pi/6 + \sqrt{3}$ (resp. $5\pi/6 - \sqrt{3}$), som därmed är det största (resp. minsta) värdet som antas på hela intervallet.

(b) Vi använder relationen

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}. \quad (1)$$

Här är $f(x) = f_2(x) = x^2 + 2 \cos x$ och $x = \pi^2 - 2$ så $f'(x) = 2x - 2 \sin x$ och $f^{-1}(\pi^2 - 2) = \det t \text{ s.a. } f(t) = t^2 + 2 \cos t = \pi^2 - 2$, alltså $t = \pi$, ty definitionsmängden har inskränkts till de positiva talen (annars skulle $t = -\pi$ vara en annan lösning). Insättning i (1) ger då att

$$(f^{-1})'(\pi^2 - 2) = \frac{1}{2\pi}.$$

Q.4 Funktionen är definierad då $x^2 - 5 > 0$, dvs då $|x| > \sqrt{5}$. Vi har lodräta asymptoter då $|x| \rightarrow 5$ och

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{5}^-} f(x) = -\infty. \quad (2)$$

Polynomet dominerar logaritmen då $|x| \rightarrow \infty$, som innebär att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (3)$$

Det finns dock ingen sned asymptot, ty differensen $f(x) - x = \ln(x^2 - 5)$ går mot $+\infty$ då $|x| \rightarrow \infty$. Men derivatan av $\ln(x^2 - 5)$ går mot noll. Det betyder att grafen ligger asymptotiskt över linjen $y = x$ och växer ifrån den, men blir allt närmare parallellt med linjen.

De kritiska punkterna erhålls genom att derivera :

$$0 = f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 5} + 1 \Rightarrow x^2 - 5 = -2x \Rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Men $x = -1 + \sqrt{6}$ är ogiltig, ty funktionen är odefinierad där. Så vi har bara en kritisk punkt i $x_0 = -1 - \sqrt{6}$, och från (2) och (3) ser vi att det måste röra sig om ett lokalt maximum.

Slutligen, kan man kolla att $f(x_0) < 0$, som innebär att grafen korsar x -axeln exakt en gång, någonstans mellan $+\sqrt{5}$ och $+\infty$. Nu har vi gott om information för att kunna skissera grafen, som finns på sista sidan.

Q.5 Eftersom marginalen i x -led är 1,5 ggr större än i y -led är det en rimlig gissning att den optimala rektangeln ska också vara 1,5 ggr större i x -led. För att bekräfta denna intuition använder vi calculus. Låt x och y beteckna rektangelns dimensioner i respektive led. Det är givet att

$$xy = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{x}. \quad (4)$$

Vi vill maximera

$$f(x, y) = (x - 3)(y - 2).$$

Från (4) kan detta skrivas som en funktion av endast x , nämligen

$$f(x) = (x - 3) \left(\frac{120}{x} - 2 \right) = 126 - 2x - \frac{360}{x}.$$

Den kritiska punkten uppfyller

$$0 = f'(x) = -2 + \frac{360}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

Notera att jag har ignorerat den negativa lösningen, som måste vara falsk. Från (4) härleder vi att $y = 4\sqrt{5} = 2x/3$, i enighet med intuitionen.

Q.6 (a) Detta är SANT. f'' är derivatan till f' , så om f'' är strängt negativ innebär det att f' är strängt avtagande. Begynselvärdet $f'(0) = -1$ är också strängt negativ, så f' är strängt negativ i hela intervallet. Detta innebär i sin tur att f själv är strängt avtagande och därmed injektiv.

(b) Detta är FALSKT. T.ex. tag $x = y = 2$. Då är $\ln(x+y) = \ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln 2 = \ln x + \ln y$.

(c) Detta är SANT därför att en deriverbar funktion är kontinuerlig (Sats 2.3.1 i boken) och om f'' existerar betyder det att f' är deriverbar.

(d) Detta är SANT. Kom ihåg att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. Därför har vi att

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -[\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = -[\mathbf{c} \times [-(\mathbf{b} \times \mathbf{a})]] = +\mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

(e) Detta är FALSKT. Algebrans fundamentalsats innebär att polynomet har sina tre rötter (kanske med repitoner) i det komplexa talplanet. Kalla dem för z_1, z_2 och z_3 . Då gäller att

$$z^3 - 3z^2 + 2z + 8 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

som medför speciellt att $z_1 z_2 z_3 = -8$. Tag absolutbeloppen så ser vi att $8 = |z_1 z_2 z_3| = |z_1| |z_2| |z_3|$. Därför måste minst ett av absolutbeloppen i HL vara större än eller lika med 2.

(f) Detta är SANT. Första villkoret tvingar z till att ligga i det övre halvplanet. Andra villkoret tvingar då in z i den första kvadranten och slutligen det tredje villkoret medför att $0 < \arg(z) < \pi/4$. Därför kommer $0 < \arg(z^3) < 3\pi/4$ att gälla, så z^3 ligger också i det övre halvplanet.

Q.7 (a) Sats 1.4.9 i boken.

(b) Sätt $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}(1-x)^3$. Man kan kolla t.ex. att

$$f(0) = -1/4 < 0, \quad f(1/4) = -11/256 < 0, \quad f(1/2) = 7/32 > 0.$$

Eftersom $f(x)$ är uppenbarligen kontinuerlig medför Sats 1.4.9 att det finns $x_0 \in (1/4, 1/2)$ sådan att $f(x_0) = 0$. Med MATLAB kan man kolla att $x_0 \approx 0,295$.

(c) Derivera: $f'(x) = 2x + \frac{3}{4}(1-x)^2$, som uppenbarligen är strängt positiv för alla $x > 0$. Därmed är $f(x)$ en strängt växande funktion på intervallet $[0, \infty)$. Eftersom f är kontinuerlig, $f(0) = -1/4$ är negativ och $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow +\infty$, följer det att grafen korsar x -axeln precis en gång.

