MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för V, TMV125
Tid: 2005-08-24, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Micke P/ Jonas H, tel 0762 721 860

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser, ev bonuspoäng inräknad: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
Lösningar beräknas finnas på kursens webbsida första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Tid för granskning meddelas via epost då rättningen är klar.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

(3p)

   b) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$. Skriv $f'(\frac{1}{\sqrt{2}})$ så enkelt som möjligt. (3p)

   c) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(2x)$ iii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x+3)}{x}$

   d) Bestäm vektorer $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ så att $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = (-3, 0, 3)$, $\boldsymbol{u}_1$ är parallell med $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$ och $\boldsymbol{u}_2$ är ortogonal mot $\boldsymbol{v}$. (3p)

   e) För vilka komplexa tal z gäller: $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ och $|z| = 9$? (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjerna $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(6, 3, 2)$ och $(x, y, z) = (1, -7, 1) + t(3, 6, 2)$. (6p)

3. Ange ekvationer för tangenter och normaler till kurvan $y = \arctan(1 + x^2)$ i de punkter på kurvan där $x = 1$ och där $x = 0$. (6p)

4. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$. (6p)

5. En triangel har ett hörn i punkten $(0, \frac{1}{2})$. Motstående sida är parallell med y-axeln. Hur stor kan triangelns area vara om hela triangeln ryms inom enhetscirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$. (6p)

VÄND!

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

   a) Varje rationell funktion, som inte är ett polynom, har minst en lodrät asymptot.

   b) Om en funktion inte är kontinuerlig så är den inte deriverbar.

   c) Om derivatan av $f(g(x))$ och derivatan av $f(x)$ är lika för alla x så är $g(x) = x$ för alla x.

   d) Om funktionen $f''(x)$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ och har ett enda nollställe $x = a$ så är f konvex på ett av intervallen $]-\infty, a[$ eller $]a, \infty[$ och konkav på det andra.

   e) Ett homogent ekvationssystem har endast den triviala lösningen om systemet har minst en fri variabel.

   f) Negationen till den öppna utsagan $|x^2 - 2| \leq 1$ är den öppna utsagan $x^2 < 1$ eller $x^2 > 3$.

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f har en asymptot $y = kx + m$ då $x \to \infty$.

   b) Bevisa att om en funktion f har en asymptot $y = kx + m$ då $x \to \infty$ så är $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$ (6p)

Lycka till!
Sven

Svar:

1 a) $(x, y, z) = (4 - 2t, -1 + t, t)$, b) $1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$, $1 - \frac{\pi}{4}$, c) i. 2, ii. 0, iii. 0,
d) $u_1 = (-1, -2, 1)$, $u_2 = (-2, 2, 2)$, e) $z = \pm\frac{9}{\sqrt{2}}(1 + i)$,

2) $2x + 2y - 9z = -21$,

3) Då x=1: Tangent $y = \frac{2}{5}x + \arctan 2 - \frac{2}{5}$, normal: $y = -\frac{5}{2}x + \arctan 2 + \frac{5}{2}$
Då x=0: Tangent: $y = \frac{\pi}{2}$, normal: $x = 0$.

4) $V_f = \{x; x < 0 \text{ eller } x \geq 1\}$,

5) $\frac{1}{2}$,

6) a) falskt b) sant c) falskt, d) falskt, e) falskt f) sant.