Inledande matematik

Föreläsning

Chalmers

2007

Samuel Bengmark

Idag

- Repetition
- Addition och skalärprodukt på koordinatform.
- Två nya operationer på vektorer
  - Hur beräknar man vinkeln mellan två vektorer?

    Svar: **Skalärprodukt**
  - Hur beräknar man en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är vinkelrät mot två givna:

    Svar **Vektorprodukt**
- Linjer och plan
  - **Parametrisering**
  - **Ekvationer**

Vektorer

En riktad sträcka, dvs har längd och riktning.

OBS! Har ej placering.

$\mathbf{v} = \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \neq \mathbf{s}$

En vektor som startar i en punkt P och slutar i en punkt Q betecknas $\overrightarrow{PQ}$

Längden för en vektor **v** betecknas med |**v**|

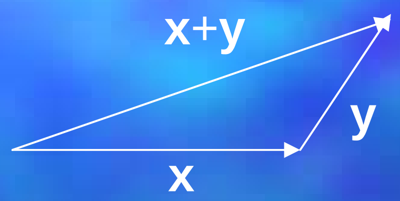
En vektor kan anges genom …

- … längd och rikting
- … slut och startpunkt. (OBS ej unikt)
- … slutpunkt på <u>ortsvektor</u>, dvs då vektorns startpunkten förläggs till origo.

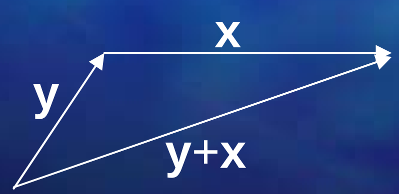
Addition

Om

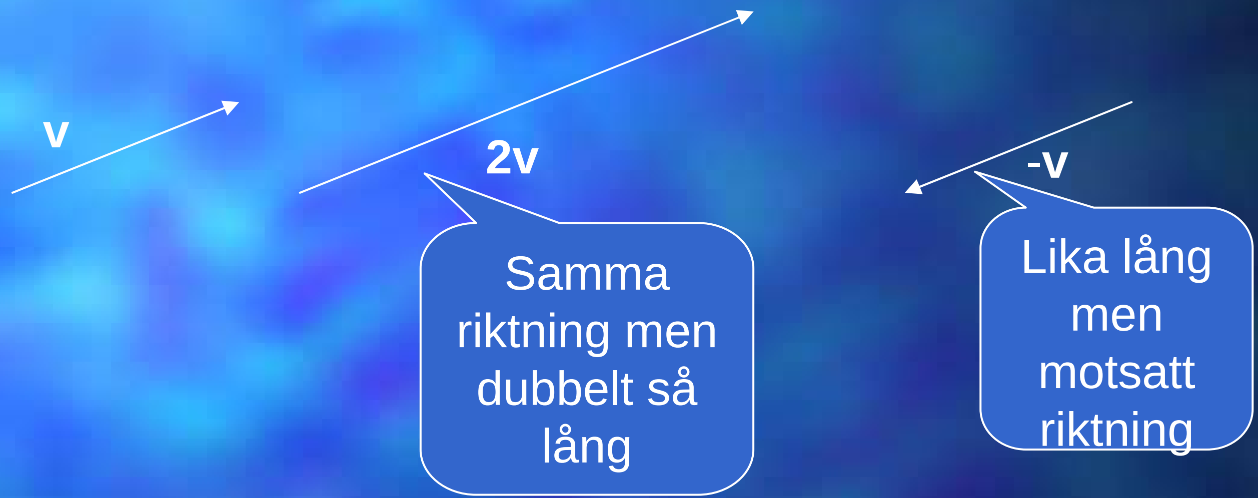
Adderar vi dem genom att sätta dem efter varandra



Ordningen spelar ingen roll (kommutativitet gäller)

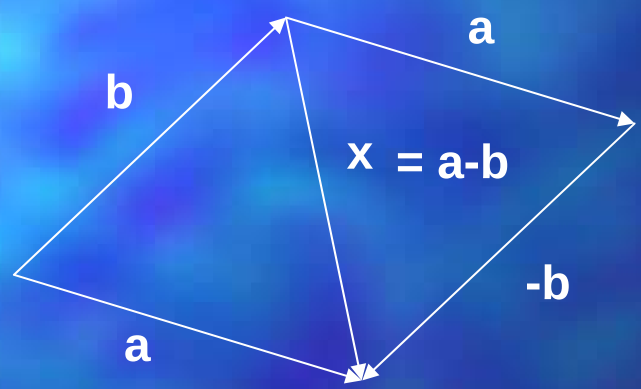


Multiplikation med skalär



$$\lambda \mathbf{v} = \begin{cases} \text{längd } |\lambda||\mathbf{v}|, \text{ samma riktning som } \mathbf{v} & \text{om } \lambda \geq 0 \\ \text{längd } |\lambda||\mathbf{v}|, \text{ motsatt riktning mot } \mathbf{v} & \text{om } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Subtraktion



b+x = a

x = a+(-b)

x = a-b

Räkneregler

$$\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$$
$$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$$
$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$
$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$
$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Koordinatform

Om $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ är tre parvis vinkelräta (ortogonala) vektorer i $\mathbb{R}^3$, då kan varje vektor **v** i $\mathbb{R}^3$ skrivas på formen

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

på ett unikt sätt

Vi skriver då

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ eller ibland } \mathbf{v} = (a, b, c)$$

Obs: Likheten med beteckning för punkt är okej eftersom slutpunkt för ortsvektor anger vektor unikt. Men man bör vara observant.

Obs: $\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Addition och multiplikation med skalär på koordinatform

Addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

Mer allmänt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Hur ser man det blir så? … tavlan …

Multiplikation med skalär

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \cdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Hur ser man det blir så?

Skalärprodukt – vad?

Definition av $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\alpha$$

där α är (minsta) vinkeln mellan vektorerna

Tre viktiga observationer

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Räkneregler

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Skalärprodukt – hur?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

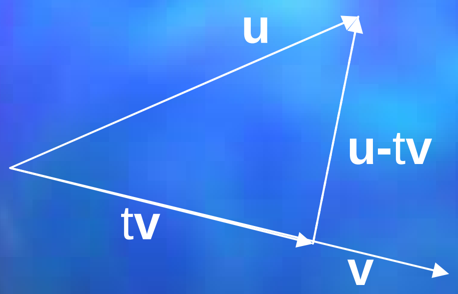
Hur kan man se det? … på tavlan …

Skalärprodukt – varför?

Beräkna vinkeln mellan två vektorer.

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\sum_i u_i v_i}{\sqrt{\sum_i u_i^2}\sqrt{\sum_i v_i^2}}$$

Projicera vektor på vektor



$$0 = (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

$$\Rightarrow t = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$$

$$\Rightarrow \text{projektionen av } \mathbf{u} \text{ på } \mathbf{v} \text{ ges av } \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

Man kan använda detta för att beräkna avståndet mellan en punkt och en linje. Hur då?

Ordningen de skrivs i spelar roll!

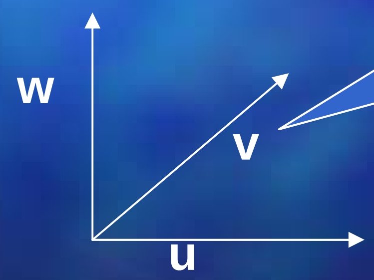
Orientering

Tre vektorer **u**,**v** och **w** sägs utgöra ett högersystem om

u pekar som tummen

v pekar som pekfingret

w pekar som långfingret



v pekar inåt i tavlan

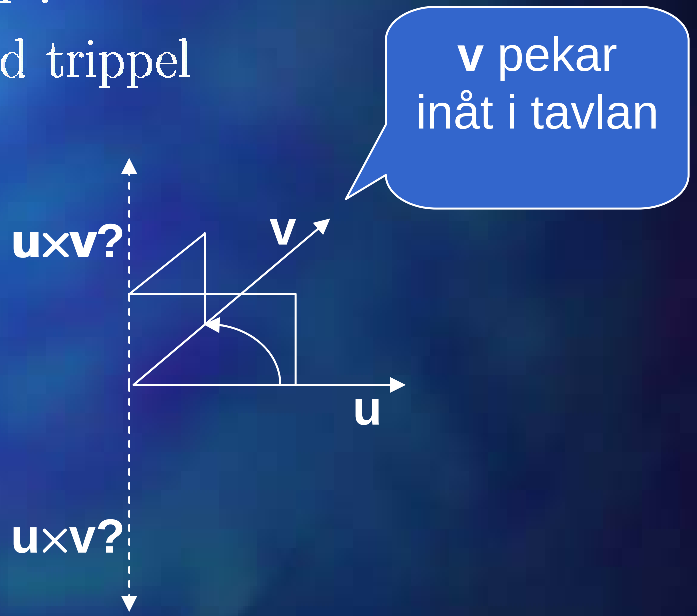
OBS!

u,**w** och **v** ett vänstersystem.

Vektorprodukt – vad?

Definition av $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

1. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha$
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot bade $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ är en högerorienterad trippel



Två viktiga observationer

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Räkneregler

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

Vektorprodukt – hur?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

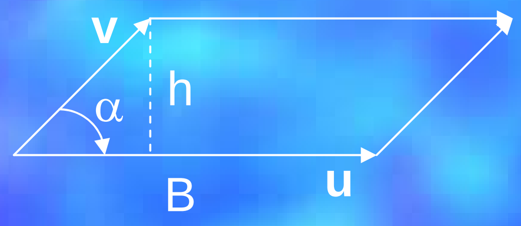
Hur ser man det? På tavlan …

Detta gäller alltså bara i högerorienterat ON-system!

Minnesregel: Determinant … på tavlan

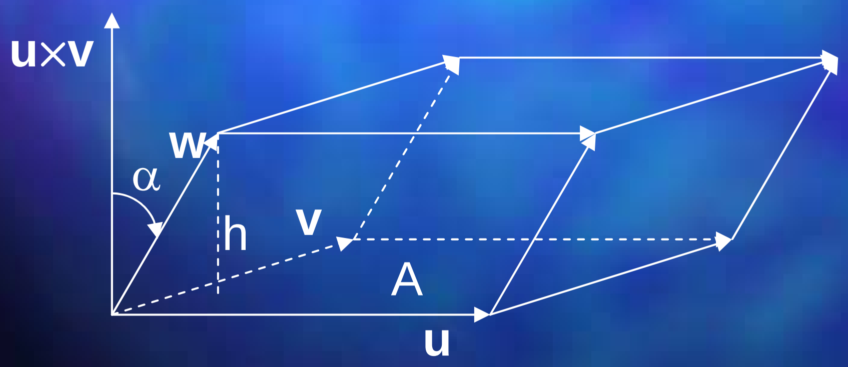
Vektorprodukt – varför?

Area av parallellogram och triangel i $\mathbb{R}^3$ (även i $\mathbb{R}^2$,hur då?)



$$B = |\mathbf{u}| \text{ och } h = |\mathbf{v}| \sin\alpha \Rightarrow$$
$$Arean = Bh = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\alpha = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$$

Volym av parallellepiped och tetraeder



$$A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \text{ och } h = |\mathbf{w}| \cos\alpha \Rightarrow$$
$$\text{Volymen} = Ah =$$
$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos\alpha = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$