

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor hösten 2008 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast fredag 24/10 em.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Endast svaren rättas!

- a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - 5y + 7z = 1 \end{cases}$$

- b) Lös ekvationen $z^4 = -1$ fullständigt. (3p)

- c) I vilket eller vilka intervall x är funktionen $f(x) = xe^{-x}$ konkav (=concave down)? (2p)

- d) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \ln x + x^3}{(\ln x)^6 + 2x^3} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{4/x}$$

- e) Funktionen $f(x) = x + \log_2 x$ är injektiv då $x > 0$. Låt $g(x)$ vara dess invers. Beräkna $g'(3)$. (Deriveringsregel: $\frac{d}{dx} \log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}$). (2p)

- f) I en rätvinklig triangel ökar kateternas längder med hastigheterna 3 m/s respektive 4 m/s. Hur snabbt växer triangelns area i det ögonblick då kateterna är 3 m resp. 4 m långa? (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Givet är de tre punkterna $A = (1, 1, 1)$, $B = (7, 3, -2)$ och $C = (4, 9, -4)$. (6p)
Låt L vara linjen genom A och B . Låt P vara planet som innehåller A , B och C . Låt Q vara planet $x - y - 2z = -12$.

- a) Ange en ekvation för L .
b) Ange en ekvation för P .
c) Beräkna skärningspunkten mellan L och Q .

Var god vänd!

3. Ange det största och det minsta värdet som antas av funktionen $f(x) = e^{-x^2}(x + \frac{1}{2})$ på intervallet $[0, 10]$. (6p)
4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x - 2}$. (6p)
Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
(Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)
5. En triangel har sina hörn i punkterna $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(1, 2)$. Låt A vara punkten $(1, 0)$. Om en linje parallell med x-axeln dras någonstans mellan $y = 0$ och $y = 2$, så kommer den att skära två av triangelns sidor, säg i punkterna B och C . På vilken höjd ska man dra denna linje för att minimera omkretsen av triangeln ABC ? (6p)
6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)
- a) För varje komplext tal z gäller att $|z| = |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.
 - b) Om ett linjärt ekvationssystem har fler ekvationer än obekanta så kan systemet inte ha entydig lösning.
 - c) Olikheten $e^x \geq x + 1$ är sann för alla reella tal x .
 - d) Låt $\mathbf{u}$ vara en vektor i rummet. Om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ så måste $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
 - e) Om $f(x)$ är definierad i hela $\mathbb{R}$ och deriverbar, och har totalt 2008 olika nollställen, så har ekvationen $f'(x) = 0$ fler än 1000 lösningar.
 - f) Om $f \circ f$ är en injektiv (one-to-one) funktion, så måste f själv vara injektiv.
7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x . (2p)
- b) Bevisa att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$. Du behöver inte bevisa eventuella hjälpsatser om trigonometri eller gränsvärden. (4p)

Lycka till! /Lennart