Tentamen för TMV125 2008-10-24 - Lösningar

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = 3 \\ x & + & 2y & - & z & = 2 \\ 2x & - & 5y & + & 7z & = 1 \end{cases}$$

   b) Lös ekvationen $z^4 = -1$ fullständigt. (3p)

   c) I vilket eller vilka intervall av x-värden är funktionen $f(x) = xe^{-x}$ konkav (=concave down)? (2p)

   d) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   i. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \ln x + x^3}{(\ln x)^6 + 2x^3}$ ii. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$ iii. $\lim_{x\to 0} (1 + 5x)^{4/x}$

   e) Funktionen $f(x) = x + \log_2 x$ är injektiv då $x > 0$. Låt $g(x)$ vara dess invers. Beräkna $g'(3)$. (Deriveringsregel: $\frac{d}{dx} \log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}$). (2p)

   f) I en rätvinklig triangel ökar kateternas längder med hastigheterna 3 m/s respektive 4 m/s. Hur snabbt växer triangelns area i det ögonblick då kateterna är 3 m resp. 4 m långa? (2p)

Lösningar (i tentan skulle dock bara svaren ges!)

(a) Systemets totalmatris överförs genom radoperationer till trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Med $z = t$ som fri variabel får vi genom bakåtsubstitution:
Svar : $x = \frac{4}{3} - t,\ y = \frac{1}{3} + t,\ z = t.$

(b) Sätt $z = re^{i\theta}$, då är $z^4 = r^4 e^{i4\theta}$. Högerledet i polär form: $-1 = e^{i\pi}$. Detta ger

$$r^4 = 1, \quad 4\theta = \pi + 2\pi n, \text{ för varje } n \in \mathbb{Z}.$$

Så $r = 1$ och vi finner 4 olika lösningar genom att välja $n = 0, 1, 2, 3$. Motsvarande värden på θ är $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ and $7\pi/4$ respektive. För att minska arbetet noterar vi att $n = 0$ ger $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ och att lösningarna bildar en kvadrat med centrum i 0 i komplexa talplanet.

Därav är lösningarna relaterade enligt:
$z_3 = -z_1,\ z_4 = \overline{z_1},\ z_2 = -z_4\ (= \overline{z_3})$.
Svar:

$$\begin{aligned} z_{1,3} &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \\ z_{2,4} &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i). \end{aligned}$$

(c) f är konkav då $f'' < 0$. Produktregeln ger

$$f'(x) = e^{-x}(1-x), \quad f''(x) = e^{-x}(x-2).$$

Thus $f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2) < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.
Svar: $(-\infty, 2)$.

(d) **i** Eftersom $\frac{\ln x}{x} \to 0$ då $x \to \infty$, så är de dominerande termerna i täljaren och nämnaren x^3 and $2x^3$ respektive. Detta ger att gränsvärdet är $\frac{1}{2}$.

ii Sätt $y = \frac{\pi}{2} - x$. Eftersom $x \to \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y \to 0$ får vi

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

iii Sätt $y = 1/x$. Eftersom $x \to 0 \Leftrightarrow y \to \pm\infty$ får vi

$$\lim_{x\to 0} (1+5x)^{\frac{4}{x}} = \lim_{y\to\pm\infty} \left[\left(1 + \frac{5}{y}\right)^y\right]^4 = (e^5)^4 = e^{20}.$$

Svar: (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 e^{20}

(e) Med $y = f(x), x = g(y) = f^{-1}(y)$ har vi sambandet

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x \ln 2}}.$$

Med $y = x + \log_2 x = 3$ ser vi att $y = 3$ ger $x = 2$ (enda lösning!), och svaret
Svar: $\frac{1}{1+\frac{1}{2\ln 2}} = \frac{2\ln 2}{2\ln 2 + 1} = \frac{\ln 4}{\ln 4 + 1}$.

(f) Låt x och y beteckna längderna av triangelns kateter. Då är

$$A = \frac{1}{2}xy \tag{1}$$

och den givna informationen är att

$$x = 3, \quad y = 4, \quad \frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = 4. \tag{2}$$

Derivera (1) med avseende på t och sätt in informationen i (2). Vi får då

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}(3 \cdot 4 + 4 \cdot 3) = 12.$$

Svar: Arean ökar med $12m^2/s$ i det givna ögonblicket.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2 Givet är de tre punkterna $A = (1,1,1)$, $B = (7,3,-2)$ och $C = (4,9,-4)$. Låt L vara linjen genom A och B. Låt P vara planet som innehåller A, B och C. Låt Q vara planet $x - y - 2z = -12$. (6p)

a) Ange en ekvation för L.

b) Ange en ekvation för P.

c) Beräkna skärningspunkten mellan L och Q.

Lösning:

a) Riktningen för L ges av $\boldsymbol{v}_1 = (7,3,-2) - (1,1,1) = (6,2,-3)$. Linjen ges därmed i parameterform av

$$L = \{((1 + 6t, 1 + 2t, 1 - 3t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Vi har $\vec{AB} = (6,2,-3)$ och $\vec{AC} = (4,9,-4) - (1,1,1) = (3,8,-5)$. En normal till planet ges av

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix} = (2(-5) - 8(-3), 3(-3) - 6(-5), 6(8) - 3(2)) =$$

$$(14, 21, 42).$$

Väljer vi A som punkt i planet, så kan ekvationen för planet skrivas

$$14(x-1) + 21(y-1) + 42(z-1) = 0,$$

vilket förenklas till $2x + 3y + 6z = 11$.

(c) Vi sätter in parameterekvationen för L i ekvationen för planet Q och löser ut t:

$$(1 + 6t) - (1 + 2t) - 2(1 - 3t) = -12,$$

Alltså: $t = -1$. Skärningspunkten mellan L och Q är $(1 + 6(-1), 1 + 2(-1), 1 - 3(-1)) = (-5, -1, 4)$.

3 Ange det största och det minsta värdet som antas av funktionen $f(x) = e^{-x^2}(x + \frac{1}{2})$ på intervallet $[0, 10]$. (6p)

Lösning:
Vi behöver kontrollera ändpunkterna och derivatans nollställen i det inre av intervallet.

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - x - 2x^2).$$

Alltså är $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x-2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$ or $x = -1$. Den sistnämnda punkten är utanför intervallet och ignoreras därför. Vi måste nu jämföra $x = 1/2$ med ändpunkterna $x = 0$ och $x = 10$. Vi får

$$f(0) = 1/2, \quad f(1/2) = e^{-1/4}, \quad f(10) = \frac{21}{2e^{100}}.$$

Uppenbarligen äår det tredje värdet minst, och det andra är störst (eftersom $e^{1/4} < 2$, eller, ekvivalent $e < 16$).

Största värdet är $e^{-1/4}$, minsta värdet är $\frac{21}{2e^{100}}$.

4 Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{x - 2}$. (6p)
Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
(Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)
Lösning:
Inga uppenbara symmetrier kan ansvändas. Vi noterar att

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +1, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

Därmed är linjerna $y = \pm 1$ horisontella asymptoter.
f är definierad för alla reella x utom $x = 2$. Vi kollar vad som händer nära denna punkt:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty.$$

Därmed är linjen $x = 2$ en vertikal asymptot.
Bestäm nu derivatans nollställen:

$$f'(x) = \frac{(x-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{(x-2)^2}.$$

Nollställena ges då av ekvationen

$$(x-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2} = 0.$$

Multiplicera med $\sqrt{x^2+2}$ och förenkla:

$$x(x-2) - (x^2+2) = 0 \Rightarrow -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Pga av uppträdandet kring asymptoterna (eller genom teckenstudium av derivatan) kan vi sluta oss till att funktionen har ett lokalt minimum i $x = -1, \quad f(-1) = -1/\sqrt{3} > -1$.
(FIGUR HÄR!)

5 En triangel har sina hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,2)$. Låt A vara punkten $(1,0)$. Om en linje parallell med x-axeln dras någonstans mellan $y = 0$ och $y = 2$, så kommer den att skära två av triangelns sidor, säg i punkterna B och C. På vilken höjd ska man dra denna linje för att minimera omkretsen av triangeln ABC? (6p)

Lösning:
Observera att $|AB| = |AC|$. Antag att den horisontella linjen dras i $y = 2t$, så $t \in [0,1]$. Då är $B = (t, 2t)$ and $C = (2-t, 2t)$ respektive. Triangelns omkrets blir då

$$P(t) = |AB| + |AC| + |BC| = 2|AB| + |BC|$$
$$= 2\sqrt{(t-1)^2 + (2t)^2} + (2-2t) = 2(\sqrt{5t^2 - 2t + 1} + 1 - t).$$

Det är denna funktion vi ska minimera. Derivera:

$$P'(t) = 2 \cdot \left(\frac{5t-1}{\sqrt{5t^2-2t+1}} - 1 \right).$$

$P'(t) = 0$ ger ekvationen

$$\frac{5t-1}{\sqrt{5t^2-2t+1}} - 1 = 0,$$

varav

$$(5t-1)^2 = 5t^2 - 2t + 1 \Rightarrow 5t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(5t-2) = 0,$$

så $t = 0$ (falsk rot!) eller $t = 2/5$. Nu är $P(0) = 4$ och $P(2/5) = 16/5$ (och derivatans teckenväxling kring $t = 2/5$ är $-0+$), så minsta omkretsen får vi då $t = 2/5$, dvs då den horisontella linjen dras på höjden $y = 4/5$.

6 Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

a) För varje komplext tal z gäller att $|z| = |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.
b) Om ett linjärt ekvationssystem har fler ekvationer än obekanta så kan systemet inte ha entydig lösning.
c) Olikheten $e^x \geq x + 1$ är sann för alla reella tal x.
d) Låt $\boldsymbol{u}$ vara en vektor i rummet. Om $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ så måste $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.
e) Om $f(x)$ är definierad i hela $\mathbb{R}$ och deriverbar, och har totalt 2008 olika nollställen, så har ekvationen $f'(x) = 0$ fler än 1000 lösningar.
f) Om $f \circ f$ är en injektiv (one-to-one) funktion, så måste f själv vara injektiv.

Svar:

a) Falskt. (Ex: $z = 1 + i$ ger $VL = \sqrt{2}, \quad HL = 2$).
b) Falskt. (Ex: $x + y = 2, \quad x - y = 0, \quad 2x + y = 3$ har entydig lösning).
c) Sant. ($y = x+1$ är tangent i $x = 0$ till den konvexa funktionen $y = e^x$).
d) Sant. ($\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$, endast nollvektorn har längden noll).
e) Sant. (Använd medelvärdessatsen eller Rolles sats på varje par av nollställen, vi får då ett garanterat nollställe för derivatan. Den måste ha minst 2007 olika nollställen).
f) Sant. (Följer av att $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2)$).

7 a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)

b) Bevisa att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$. Du behöver inte bevisa eventuella hjälpsatser om trigonometri eller gränsvärden. (4p)

Lösning: Se läroboken!