TMV125 Inledande matematik för V/AT 2009-01-17 - lösningar.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

   b) Lös olikheten $(1-x)(x^2+x+4) \leq 0$. (2p)

   c) För vilka $\theta \in [0, 2\pi)$ gäller att $\sin 2\theta = \sin\theta$? (2p)

   d) En punkt rör sig längs kurvan $y = x^3 - 3x + 5$ så att $x = \frac{\sqrt{t}}{2} + 3$, där t är tiden. (2p)
   Beräkna den momentana y-ändringen per tidsenhet då $t = 4$.

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   i. $\lim_{x\to 0+} (\sin x)(\ln x)$ ii. $\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(\ln x)^2}}$ iii. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^{30}}{3^x + x^2}$

   f) Funktionen $f(x) = x^3 + 4x$ är injektiv (one-to-one). (3p)
   Beräkna $\phi'(0)$ och $\phi'(-5)$ där ϕ är den inversa funktionen till f.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1,2,3)$, $B = (-2,-1,2)$, $C = (1,0,1)$ och låt P vara planet $2x + 3y - z = 0$. (6p)

   a) Ange en ekvation för normalen till planet P genom punkten A.

   b) Ange en ekvation för planet Q som är parallellt med P och innehåller punkten A.

   c) Ange skärningspunkten mellan planet P och linjen genom B och C.

Var god vänd!

3. Ange värdemängden till funktionen (6p)

$$f(x) = \ln|x-3| + \arctan x$$

   då definitionsmängden begränsas till intervallet $[-1, 3)$.

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x(x-3)}{x-4}$. (6p)
   Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
   (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

5. Låt M beteckna mängden av komplexa tal z som uppfyller ekvationen (6p)

$$|z - (2+i)| = 3.$$

   Vilket tal z i mängden M ligger närmast origo i det komplexa talplanet?

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om funktionen f är två gånger deriverbar så är f' kontinuerlig.

   b) Om z är ett komplext tal sådan att $\mathrm{Arg}(z) = 15°$, så är $\mathrm{Re}(z^{60}) < 0$.

   c) Derivatan av 10^x är lika med $x \cdot 10^{x-1}$.

   d) Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ så är $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 1$.

   e) Om f är en injektiv och växande funktion så är f^{-1} avtagande.

   f) För alla reella tal x och y gäller att $|\sin(x+y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$.

7. a) Formulera både *satsen om mellanliggande värde* och *Max-Min-satsen* för kontinuerliga funktioner. (3p)

   b) En Formel 1-bil kör ett varv på en 6km lång bana på exakt 2 minuter. Förklara med hjälp av satserna ovan varför bilens hastighet är exakt 50m/s någonstans på varvet. (3p)

LÖSNINGAR

1. På tentan skulle bara svar ges, men här kommer korta lösningar.

a) Systemets totalmatris överförs via elementära radoperationer till reducerad trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi ser då att z är en fri variabel, och vi kan skriva de oändligt många lösnoingarna i parameterform:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

b) Eftersom faktorn x^2+x+4 alltid är positiv (kvadratkomplettera!), så är olikheten $(1-x)(x^2+x+4) \leq 0$ ekvivalent med $1-x \leq 0$. Olikheten är därmed sann exakt då $\mathbf{x \geq 1}$.

c) $\sin 2\theta = \sin\theta \;\Leftrightarrow\; 2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta \;\Leftrightarrow\; \sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow\; \sin\theta = 0$ eller $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

Lösningarna till dessa ekvationer är $\theta = n\cdot\pi$ respektive $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. I intervallet $[0, 2\pi)$ finner vi då vinklarna $\mathbf{0}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

d) Vi söker derivatan $\frac{dy}{dt}$ då $t = 4$. Med $y = x^3 - 3x + 5$ och $x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ får vi med kedjeregeln $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = (3x^2-3)(\frac{1}{4\sqrt{t}})$. $t = 4$ ger $x = 4$ och $\mathbf{\frac{dy}{dt} = \frac{45}{8}}$.

e) (i) $\lim_{x\to 0+}(\sin x)(\ln x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x}(x \ln x) = 1 \cdot 0 = \mathbf{0}$

(ii) $x \to 1 \;\Rightarrow\; (\ln x)^2 \to 0 \Rightarrow -\frac{1}{(\ln x)^2} \to -\infty \;\Rightarrow\; e^{-\frac{1}{(\ln x)^2}} \to \mathbf{0}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^{30}}{3^x + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{x^{30}}{3^x}}{1 + \frac{x^2}{3^x}} = \frac{0+0}{1+0} = \mathbf{0}$

f) Om $\phi = f^{-1}$ och $y = f(x)$, så gäller $\phi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2+4}$.
$y = 0$ och $y = -5$ motsvarar $x = 0$ respektive $x = -1$, så
$\mathbf{\phi'(0) = \frac{1}{4}}$ och $\mathbf{\phi'(-5) = \frac{1}{7}}$

2. a) En normalvektor till planet erhålls ur koefficienterna till det parallella planet P:s ekvation $2x+3y-z=0$. Ta alltså vektorn $(2,3,-1)$ som riktningsvektor till normalen genom $(1,2,3)$. Dess ekvation i vektorform blir då $(x,y,z) = (1,2,3)+t(2,3,-1)$ eller $\mathbf{(x,y,z) = (1+2t, 2+3t, 3-t)}$.

b) Varje plan parallellt med $2x+3y-z=0$ måste ha en ekvation på formen $2x+3y-z=D$. Sätt in punkten $A = (1,2,3)$ (som ska ligga i planet) och få $D = 5$. Planet Q har alltså ekvationen $\mathbf{2x+3y-z=5}$.

c) Vi behöver en ekvation för linjen genom B och C att kombinera med ekvationen för planet P. Riktningsvektor: $\overrightarrow{BC} = (1,0,1)-(-2,-1,2) = (3,1,-1)$, som punkt på linjen tar vi $B = (1,0,1)$. Linjen har då vektorekvationen $(x,y,z) = (1,0,1)+t(3,1,-1) = (1+3t, t, 1-t)$. Om vi sätter in detta i ekvationen för planet P, $2x+3y-z=0$, så får vi det parametervärde som svarar mot skärningspunkten:
$2(1+3t)+3t-(1-t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{10}$. Detta ger insatt i linjens ekvation skärningspunkten $\mathbf{(\frac{7}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{11}{10})}$.

3. Funktionen $f(x) = \ln|x-3| + \arctan x$ med definitionsmängden $[-1,3)$ är deriverbar med $f'(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x^2+1)}$. Vi ser att $f'(x) > 0$ i $[-1,1)$, $f'(1) = 0$ och $f'(x) < 0$ i $(1,3)$. Av detta följer att f har ett lokalt och absolut maximum i $x = 1$, största värdet är $f(1) = \ln 2 + \frac{\pi}{4}$. Eftersom f är kontinuerlig och $f(x) \to -\infty$ då $x \to 3^-$, så följer av satsen om mellanliggande värde att värdemängden är hela intervallet $\mathbf{\left(-\infty, \ln 2 + \frac{\pi}{4}\right]}$.

4. Funktionen $f(x) = \frac{x(x-3)}{x-4}$ är definierad för alla reella tal utom $x = 4$, den har nollställena $x = 0$, $x = 3$.

Vi söker nu asymptoter. Eftersom $f(x) \to -\infty$ då $x \to 4^-$ och $f(x) \to +\infty$ då $x \to 4^+$, så är linjen $x = 4$ en vertikal asymptot.

Eftersom $\frac{f(x)}{x} = \frac{x-3}{x-4} \to 1$ och $f(x) - 1 \cdot x = \frac{x}{x-4} \to 1$ då $x \to \pm\infty$, så är linjen $y = x + 1$ en sned asymptot.

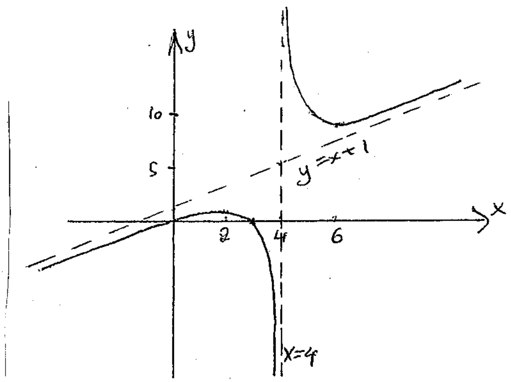
Vi undersöker nu funktionens växande och avtagande i olika intervall samt eventuella lokala extrempunkter. Därför beräknar vi derivatan:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-4)-(x^2-3x)\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x+12}{(x-4)^2} = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)^2}$$

Derivatans teckenvariation och slutsatser beträffande f:s växande och avtagande sammanfattas i följande tabell:

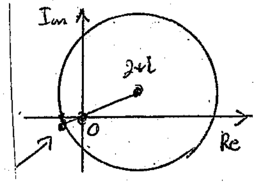
x	<	2	<	4	<	6	<
f'(x)	+		-		-	0	+
f(x)	↗	1	↘	ej def	↘	9	↗

Vi ser nu att f har ett lokalt maximum i $x = 2$ och ett lokalt minimum i $x = 6$. Vi ritar grafen med stöd av tabellen:



Svar på frågorna:
Asymptoter: $x = 4$, $y = x + 1$, lokala extrempunkter: $x = 2$ lokalt maximum, $x = 6$ lokalt minimum.

5. Ekvationen $|z-(2+i)| = 3$ motsvarar geometriskt en cirkel med centrum i punkten $2+i$ och radien 3. Den punkt på cirkeln som är närmast $z = 0$ måste vara ändpunkt på radien genom $z = 0$ (se figur!). Avståndet mellan denna punkt och punkten $2+i$ är alltså 3, avståndet mellan $z = 0$ och $2+i$ är $|2+i| = \sqrt{5}$. Vår närmaste punkt befinner sig därmed på avståndet $3-\sqrt{5}$ från $z = 0$. Det tal som svarar mot denna punkt måste vara $-(3-\sqrt{5})\frac{2+i}{|2+i|} = -\frac{6}{\sqrt{5}} + 2 + i(-\frac{3}{\sqrt{5}} + 1)$.



$(\frac{2+i}{|2+i|}$ är en komplex enhetsvektor i riktning från $z = 0$ mot $2+i)$.

6. a) f 2 ggr deriverbar $\Rightarrow$ f' deriverbar $\Rightarrow$ f kontinuerlig. **Sant.**

b) $\arg z^{60} = 60 \arg z = 900° = 2\cdot 360° + 180°$, $Argz^{60} = 180°$ **Sant.**

c) $\frac{d}{dx}10^x = 10^x \ln 10$ (och inte det som påstods!) **Falskt.**

d) Välj t ex $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
Båda går mot noll då $x \to \infty$, men $f(x)^{g(x)} \to e^{-1}$ **Falskt.**

e) Exemplet $f(x) = x$ med $f = f^{-1}$ vederlägger påståendet. **Falskt.**

f) $|\sin(x+y)| = |\sin x \cos y + \cos x \sin y|$
$\leq |\sin x||\cos y| + |\cos x||\sin y| \leq |\sin x|\cdot 1 + 1\cdot|\sin y|$ **Sant.**

7. a) Se Adams 1.4, sats 8 och 9.

b) Ett varv tillryggaläggs på ett slutet och begränsat tidsintervall. Bilens hastighet utgör under detta tidsintervall en kontinuerlig funktion. Från Max-Min-satsen vet vi då att hastigheten har ett största värde v_{max} och ett minsta värde v_{min} i detta intervall. Antingen är $v_{min} < \overline{v}$ och $v_{max} > \overline{v}$, eller så är hastigheten konstant $= \overline{v}$. I det första fallet garanterar satsen om mellanliggande värde att det finns en tidpunkt då hastigheten är exakt $\overline{v} = 50m/s$, i det andra fallet gäller ju detta hela tiden.