MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, TMV156, 2007-01-19

Lösningar

1.(a) $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$. $\arg(3-4i) = \arctan(-\frac{4}{3}) = -\arctan(\frac{4}{3})$, en vinkel i den 4:e kvadranten.
pss, $|-7+3i| = \sqrt{(-7)^2+3^2} = \sqrt{58}$ och $\arg(-7+3i) = \arctan(-\frac{3}{7})+\pi = \pi - \arctan(\frac{3}{7})$, en vinkel i andra kvadranten.
Svar: $|3-4i| = 5$, $\arg(3-4i) = -\arctan(\frac{4}{3})$, $|-7+3i| = \sqrt{58}$ och $\arg(-7+3i) = \pi - \arctan(\frac{3}{7})$.

(b) $(x+2)(x^2+x-6) \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x-2) \geq 0. \Leftrightarrow$
$-3 \leq x \leq -2$ eller $2 \leq x$
Svar: $[-3,-2] \cup [2,\infty[$

(c) Man använder följande fakta :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A \sin B,$$
$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Därmed har vi att

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Svar: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(d) Eliminering ger $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$
Svar:

$$\begin{cases} x &= 1-5t \\ y &= 2+3t \\ z &= t \end{cases}$$

(e) (i)

$$\frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4} = \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{x^2(1+x^2)} = 4 \cdot \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Då $x \to 0$ så går båda kvoten mot 1, så svaret blir 4.
Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4} = 4$

(ii) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \dfrac{|x|\,\sqrt{1+1/x^2}}{x+1} = \text{då } x \text{ är negativt} = -\dfrac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x} \to -1$

Svar: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = -1$

(iii)

$$\frac{2x+3\ln x}{x+\ln x} = \frac{2x\left(1+\frac{3\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)} = 2\cdot\frac{1+\frac{3\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}.$$

Eftersom $\frac{\ln x}{x} \to 0$ då $x \to \infty$ så är gränsvärdet lika med 2.

Svar: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3\ln x}{x+\ln x} = 2$

(f) Vi använder formeln

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

där $y = f(x)$. Här är $y = 3$ så vi söker x sådan att $3 = x^3 + 2x$. Man ser direkt att $x = 1$ (enda lösning, eftersom derivatan visar att f är växande). Eftersom $f'(x) = 3x^2 + 2$ för godtyckligt x så har vi att

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3\cdot 1^2+2} = \frac{1}{5}.$$

2. En normalvektor till planet är $(-1,-1,-1)\times(2,1,1) = (0,-1,1)$. En ekvation för planet genom $(2,-1,0)$ med denna normalriktning ges då av $(0,-1,1)\cdot(x-2, y-(-1), z-0) = 0$, dvs $0(x-2) - 1(y+1) + 1(z-0) = 0$. Förenklas till: **Svar: -y+z=1**.
Linjen genom $(-2,2,3)$ vinkelrät mot planet har riktningsvektorn $(0,-1,1)$ (planets normalvektor), och kan då i parameterform skrivas:
Svar: $(x,y,z) = (-2,2,3) + t(0,-1,1)$ eller $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (-\mathbf{2}, \mathbf{2}-\mathbf{t}, \mathbf{3}+\mathbf{t})$.

3. $x^2 + 4x + 4 > 0$ för alla x, alltså är $D_f = [0,\infty[$.

Vi har att $f(0) = -\frac{1}{4}$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-1/x}{x(1+4/x+4/x^2)} = 0$.

Vidare är $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+8}{(x+2)^4} = -\dfrac{x^2-2x-8}{(x+2)^4} = -\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x+2)^4} = -\dfrac{x-4}{(x+2)^3}$ vilket ger oss nedanstående teckentabell för derivatan.

x	0	$0<x<4$	4	$4<x$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	0

Svar: Största värdet är $f(4) = \frac{1}{12}$, minsta är $f(0) = -\frac{1}{4}$.

4. Notera att $x^2 + 3x + 3 > 0$ för alla reella x ty den kvadratiska ekvationen $x^2+3x+3 = 0$ har två komplexa rötter. Så definitionsmängden till f är hela $\mathbb{R}$. Det finns ingen vertikal asymptot.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

   $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x(\Big(\frac{2\ln(x)\ln(1+3/x+3/x^2)}{x} - 1\Big) = -\infty$.

   Det finns således ingen horisontell asymptot.

   För att bestämma ev. sned asymptot beräknasr vi gränsvärdena:
   $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(\Big(\frac{2\ln(|x|)\ln(1+3/x+3/x^2)}{x} - 1\Big) = -1 = k$.

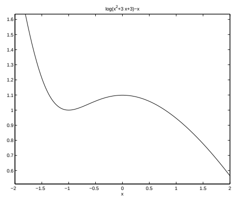
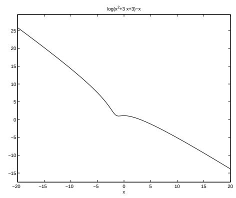
   och

   $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2+3x+3) = \infty$.
   Finns alltså ingen sned asymptot

   Vidare är $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = -\dfrac{x(x+1)}{x^2+3x+3}$ vilket ger oss nedanstående teckentabell för derivatan.

x	$-\infty$	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < \infty$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	-	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\ln(3)$	$\searrow$	$-\infty$

   Med stöd av tabellen ovan kan vi rita grafen till funktionen.

   Svar: Lokalt maximum i punkten $(0, \ln(3))$, lokalt minimum i punkten $(-1, 1)$. Inga asymptoter.

5. Låt rektangelns bas vara $2r$ och dess höjd h. Vi söker förhållandet mellan h och $2r$.

   Fönstrets omkrets är given, kalla den K. Vi har alltså $K = 2h+2r+\pi r$, vilket ger $h = (K - r(2+\pi))/2$. Arean av halvcirkeln är $\frac{1}{2}\pi r^2$, arean av rektanglen är $2rh = r(K - r(2+\pi))$.

   Ljusinsläppet är då, bortsett från någon konstant faktor beroende av glaskvalitet mm, $f(r) = \frac{1}{4}\pi r^2 + r(K - r(2+\pi)) = Kr - (2 + \frac{3}{4}\pi)r^2$.

   $f'(r) = K - 2(2+\frac{3}{4}\pi)r$. Man ser direkt att $f'(r) > 0$ för $r < \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)}$ och att $f'(r) < 0$ för $r > \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)}$.

   f antar således sitt största värde för $r = \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)} = \frac{2K}{8+3\pi}$.

   Då är $h = (K - r(2+\pi))/r = (K - \frac{2K(2+\pi)}{8+3\pi})/2 = \frac{K(4+\pi)}{2(8+3\pi)}$.

   Förhållandet $h : 2r = \frac{K(4+\pi)}{2(8+3\pi)} / \frac{4K}{8+3\pi} = \frac{4+\pi}{8}$.

   Svar: $\dfrac{h}{2r} = \dfrac{4+\pi}{8}$.

6. a) **Svar:** Falskt. (Motexempel: $z = 1,\ w = i$).
   b) **Svar:** Sant. (Följer av Adams: sats 3.4 eller genom undersökning med derivata).
   c) **Svar:** Falskt. (Motexempel: $f(x) = 2,\ g(x) = \sin x$).
   d) **Svar:** Sant. (Polynomet har udda gradtal!)
   e) **Svar:** Sant. (Se Adams: kap. 10.3 sid 558).
   f) **Svar:** Falskt. (Motexempel: $f(x) = x$).

7.(a) Se Adams kap. 1.4, definition 4.
  (b) Se Adams kap. 1.4, sats 9 sid. 82.
  (c) Sätt $g(x) = f(x) - x$. Då är g också definierad i hela intervallet $[0, 1]$ och kontinuerlig där. Vidare är

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0,$$

och

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Eftersom $g(0) \geq 0$ och $g(1) \leq 0$ och g är kontinuerlig, så medför satsen om mellanliggande värden att det finns minst ett $x \in [0, 1]$ sådan att $g(x) = 0 \iff f(x) = x$, vilket vi skulle visa.