1. Till denna uppgift ska du **ENDAST LÄMNA IN SVAR**, alltså utan motiveringar. Här ges dock korta lösningar.

   a) Ange alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 5 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

   Systemet överförs genom elementära radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \quad\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

   Detta ger lösningarna (oändligt många):

   Svar:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

   b) För vilka reella tal x är olikheten $|5 - x^2| < 4$ sann?

   Avståndet på tallinjen mellan x^2 och 5 ska vara mindre än 4. Det ger $1 < x^2 < 9$, vilket motsvarar

   Svar: $-3 < x < -1,\ 1 < x < 3$

   c) Funktionen $f(x) = e^x + \ln x$ $(x > 0)$ är inverterbar. Beräkna $(f^{-1})'(e)$.

   Vi observerar att $f(1) = e$, $f'(1) = e + 1$. För derivatan gäller nu: $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)}$.

   Svar: $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{e+1}$

   d) Luft pumpas in i en sfärisk ballong med hastigheten 3 m^3/s. Hur snabbt växer ballongens diameter i det ögonblick då diametern är en meter.

   Med r = radien, D = diametern, V = volymen gäller $V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi D^3}{6}$. Dessa variabler är här funktioner av tiden t, och vi kan derivera sambandet med avseende på t (kedjeregeln):
   $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{2} D^2 \frac{dD}{dt}$. Känt: $\frac{dV}{dt} = 3$, $D = 1$, sätt in och lös ut $\frac{dD}{dt} = \frac{6}{\pi}$.

   Svar: Diametern växer med $\frac{6}{\pi}$ m/s.

   e) Ange följande gränsvärden:

   i. $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

   ii. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)}$

   iii. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

   i) $\frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}(x+1) \to 1 \cdot 2 = 2$ då $x \to 1$.

   ii) $\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)} = \frac{\ln x^2(1+x^{-2})}{\ln x^3(1+x^{-3})} = \frac{2\ln x + \ln(1+x^{-2})}{3\ln x + \ln(1+x^{-3})} = \frac{2 + \frac{\ln(1+x^{-2})}{\ln x}}{3 + \frac{\ln(1+x^{-3})}{\ln x}} \to \frac{2}{3}$ då $x \to \infty$.

   iii) $\frac{e^{2x} - e^x}{x} = e^x \frac{e^x - 1}{x} \to e^0 \cdot 1 = 1$ då $x \to 0$.

   Svar: a) 2   b) $\frac{2}{3}$ c) 1

   f) Ange alla komplexa tal z sådan att $\mathrm{Im}(z) > 0$ och $z^6 = -1$.

   Med $z = re^{i\theta}$ får vi ekvationen i polär form: $r^6 e^{i6\theta} = 1 \cdot e^{i\pi}$. Vi får $r = 1$, $6\theta = \pi + 2k\pi$, och lösningarna blir $z = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. De lösningar som har $\mathrm{Im}(z) > 0$ svarar mot $k = 0, 1, 2$. Med $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ får vi:

   Svar: $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, i, $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,3)$ och $C = (-1,0,3)$.

a) Beräkna arean av triangeln med hörn i A, B och C.

b) Beräkna avståndet från C till linjen genom A och B.

c) Beräkna avståndet från punkten $D = (3,3,3)$ till triangelns plan.

d) Ange ekvationen för linjen genom A och B i parameterform.

---

a) Arean är $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}|(1,2,2) \times (-2,-1,2)| = \frac{1}{2}|(6,-6,3)| = \frac{3}{2}|(2,-2,1)| = 4,5$

b) Avståndet är längden av ortogonalprojektionen av $\vec{AC}$ på sidan AB, dvs $\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|} = 3$

c) Avståndet är längden av ortogonalprojektionen av $\vec{AD}$ på triangelplanets normal $= \frac{|\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \frac{2}{3}$

d) Med punkten $A = (1,1,1)$ och riktningsvektorn $\mathbf{v} = \vec{AB}$ är linjens ekvation i parameterform: $\mathbf{r} = \vec{OA} + t\mathbf{v}$, vilket skrivs ut i svaret nedan.

Svar: a) 4,5 b) 3 c) $\frac{2}{3}$ d) $(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,2,2)$

---

3. Bestäm definitions- och värdemängden för funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Funktionen f är definierad då $\ln x$ är det, dvs i $(0,\infty)$. Vi deriverar:
$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ med enda nollställe $x = e$.
Vi observerar också att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$, samt att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ (enligt gränsvärdeslag). Vi gör en teckentabell för derivatan (gränsvärden inom parentes):

x	0	<	e	<	∞
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$(-\infty)$	↗	e^{-1}	↘	(0)

Av denna undersökning framgår att f antar alla värden i intervallet $(-\infty, \frac{1}{e}]$.

Svar: Definitionsmängden är $(0,\infty)$ och värdemängden är $(-\infty, \frac{1}{e}]$.

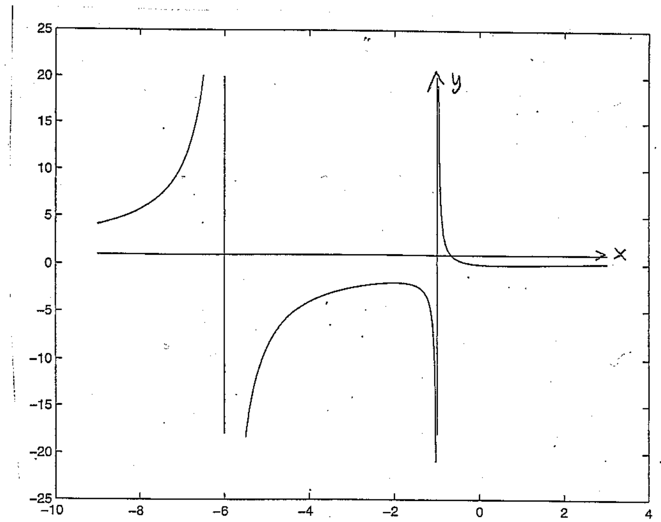
---

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+7x+6}$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

Vi konstaterar först att $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x}{x^2+7x+6} = 1$, vilket innebär att $y = 1$ är vågrät asymptot i $-\infty$ och $+\infty$. Nämnarens nollställen är $x = -6$, $x = -1$, så f är definierad i $(\infty,-6) \bigcup (-6,-1) \bigcup (-1,\infty)$. Vidare gäller att
$f(x) \to +\infty$ då $x \to -6^-$ och $x \to -1^+$, $f(x) \to -\infty$ då $x \to -6^+$ och $x \to -1^-$. Linjerna $x = -6$ och $x = -1$ är lodräta asymptoter.
Vi undersöker derivatan: $f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+7x+6)-(x^2-2x)(2x+7)}{(x^2+7x+6)^2}$
och efter förenkling och faktoruppdelning: $f'(x) = \frac{9(x+2)(x-\frac{2}{3})}{(x+6)^2(x+1)^2}$.
Nollställen: $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$
Vi gör en teckentabell för god översikt:

x	$-\infty$	<	-6	<	-2	<	-1	<	$\frac{2}{3}$	<	$+\infty$
f'(x)		+		+	0	-		-	0	+	
f(x)	(1)	↗	ej def	↗	-2	↘	ej def	↘	-0,08	↗	(1)

Vi ser att f har ett lokalt maximum i $x = -2$ och ett lokalt minimum i $x = \frac{2}{3}$.



Svar: Asymptoter: $x = -6$, $x = -1$, $y = 1$,
lokalt maximum i $x = -2$, lokalt minimum i $x = \frac{2}{3}$.

5. 1 km från en plats A går en flod med parallella stränder och bredden 100 m. 6 km längre ned längs floden ligger en annan plats B, fast på andra sidan och 2 km från floden. Nu vill man bygga en bro över floden så att färdsträckan mellan A och B via bron minimeras. Man antas röra sig rätlinjigt till och från bron. Var ska bron byggas?

Antag att bron byggs x km nedströms från den punkt på stranden som ligger närmast A. Då är det $6-x$ km kvar till motsvarande punkt närmast B. Totala sträckan blir då (via Pythagoras sats):

$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{10}+\sqrt{(6-x)^2+4}, \quad 0\leq x\leq 6$

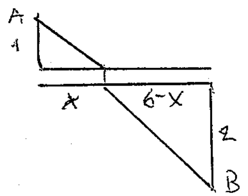
Derivera!

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{-(6-x)}{\sqrt{(6-x)^2+4}}$

$f'(x)=0 \iff x\sqrt{(6-x)^2+4}=(6-x)\sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow x^2((6-x)^2+4)=(6-x)^2(x^2+1)$

$\iff 3x^2+12x-36=0$ med rötterna $x=-6,\ x=2$.



Studerar vi tecknen i vänster- och högerled före kvadrering, ser vi att den första är en falsk rot på grund av kvadrering, den andra är sann. Eftersom $f'(0)<0,\ f'(6)>0$ måste den kontinuerliga funktionen f' ha teckenvariationen $-\ 0\ +$, dvs $x=2$ ger lokalt minimum, tillika minsta värde.

Det finns också en "finurlig" lösning:
Flodens bredd påverkar inte resultatet, den ger ju en konstant term i $f(x)$. I så fall kan vi ersätta floden med en som har bredd noll. Kortaste vägen blir då en rät linje mellan A och B, varmed lösningen lätt hittas med likformighet. Floden kan skjutas in igen för korrekt tolkning.

Svar: Bron ska byggas 2 km nedströms från den punkt på stranden som ligger närmast A.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

a) Ekvationen $x^3+2008x^2+2008x+2008=0$ saknar reella lösningar.

Svar: Falskt. (Udda gradtal innebär att polynomet antar alla reella värden).

b) För alla komplexa, icke-reella tal z gäller att $\mathrm{Re}(z)<|z|$.

Svar: Sant. (Om z inte ligger på realaxeln, så är avståndet $|z|$ till 0 strängt större än avståndet $|\,\mathrm{Re}\,z|$ till imaginäraxeln, vilket i sin tur är $\geq \mathrm{Re}\,z$.)

c) För alla θ sådan att $0<\theta<\pi/4$ så gäller att $\sin\theta<\sin 3\theta$.

Svar: Sant. (Man kan inse att påståendet är sant genom att rita $y=\sin\theta$ och $y=\sin 3\theta$ i samma figur. Annars är $\sin 3\theta-\sin\theta=2\sin\theta\cos 2\theta$, här är faktorerna positiva i $(0,\frac{\pi}{4})$.)

d) Om $f(x)$ är deriverbar för alla x i intervallet $(-1,1)$ så existerar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Svar: Sant. (f deriverbar i 0 medför att f är kontinuerlig i 0, dvs $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.)

e) Om f är deriverbar, $f(0)=0$ och $f(1)=1$ så måste $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

Svar: Falskt. (Ex: $f(x)=8(x-\frac{1}{2})^3-x+1$. Här är $f'(\frac{1}{2})=-1$. Kan dock inses utan specifikt exempel genom kurvritnoing.)

f) Om $y=f(x)$ är en injektiv (ett-till-ett) funktion och $y=g(x)$ dess invers, så gäller att $(f\circ g\circ f)(x)=f(x)$.

Svar: Sant. ($f\circ(g\circ f)=f\circ(f^{-1}\circ f)=f\circ id=f$.)

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x.

b) Formulera och bevisa *produktregeln*, dvs räknelagen för derivering av en produkt av två funktioner.

Se Adams sid 98 respektive 108-109!