

Översikt över genomgång vid övningstillfället tisdag 14/10 2008.

Genomgången på föreläsning tidigare: till och med skalärprodukt (definition 3, sats 1 sid 549 + lite exempel, linjens och planets ekvationer enligt 10.4

Vi tillåter oss att alternativt skriva en vektor som (x, y, z) istället för $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Teorigenomgång

- Definition av vektorprodukten enligt Adams 10.3 definition 5.
Tolkningen av $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ som arean av en parallelogram.
- Kommentarer kring räknelagarna på nästa sida (properties of the cross product). Nr (iii) och (iv) är besvärliga att visa, men dem får vi tro på. Uppmärksamma därtill speciellt nr (ii) som är lätt att förklara.
- Undersökning av kryssprodukterna mellan standardbasvektorerna:
 $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$,
 $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$
- Med hjälp av räknelagarna härleder vi formeln i sats 2 (detta känns väl mera naturligt än Adams bevis, som utgår från den färdiga formeln och visar att den stämmer?):

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + u_1v_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + \dots + u_3v_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \dots\end{aligned}$$

Nio termer; använd likheterna under föregående punkt!

$$\dots = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

- En kort introduktion om determinanter enligt:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Anmärkning: determinanten av en 2x2-matris uttrycker $\pm$ arean av den parallelogram som matrisens kolonnvektorer genererar, medan determinanten av en 3x3-matris uttrycker $\pm$ volymen av den parallelogram som matrisens kolonnvektorer genererar.

- Vi konstaterar nu att formeln för $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ovan blir som på sid. 557 i Adams! Byt bara översta radens tre tal mot basvektorsymbolerna $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ och rad 2 och 3 mot komponenterna för vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i denna ordning.

Ett räkneexempel (lösning på nästa sida).

Ett plan π innehåller punkterna $P = (1, -1, 2)$, $Q = (4, 0, 1)$, $R = (1, 1, 3)$.

- Bestäm en normalvektor till planet.
- Bestäm en ekvation för planet.
- Beräkna skärningspunkten mellan planet π och räta linjen
 $(x, y, z) = (2, -2, 3) + t(1, 1, -2)$.
- Bestäm skärningslinjen mellan planet π och planet $x - 2y + 3z = 4$.

- a) Vi tar två vektorer som *ligger i planet* (vanligt språkbruk, men egentligen är *parallella med planet*, eftersom de inte har någon fast placering i rummet - bara längd och riktning):

$$\mathbf{u} = \vec{PQ} = (4, 0, 1) - (1, -1, 2) = (3, 1, -1) \text{ och}$$

$$\mathbf{v} = \vec{PR} = (1, 1, 3) - (1, -1, 2) = (0, 2, 1).$$

Tar vi kryssprodukten av dessa, får vi en vektor som är vinkelrät mot varje vektor i planet, dvs en *normalvektor* till planet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \\ &= 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = (3, -3, 6) = 3(1, -1, 2). \end{aligned}$$

Eftersom den kortare vektorn $(1, -1, 2)$ har samma riktning som $(3, -3, 6)$, så kan vi lika gärna välja den förstnämnda som normalvektor: $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$.

Obs! Ren tillfällighet att komponenterna blir precis samma som koordinaterna för punkten P .

- b) Planets ekvation enligt Adams sid 561, där $\mathbf{n} = (A, B, C)$ och (x_0, y_0, z_0) är en punkt i planet:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Om vi väljer normalvektorn vi fick i a) och punkten $Q = (4, 0, 1)$ (spelar ingen roll vilken punkt i planet som väljs, det blir samma ekvation!), så har vi alltså:

$$1(x - 4) - 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0$$

vilket förenklas till

$$x - y + 2z = 6$$

- c) Linjens ekvationer och planets ska samtidigt vara satisfierade för varje punkt på skärningslinjen, dvs vi ska lösa ett ekvationssystem med ekvationerna

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 2t \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Ersätt x, y, z i sista ekvationen (planets) med uttrycken i de tre första (linjens ekvationer) och lös ut t . Sätt sedan in detta värde på t i linjens ekvationer. Vi får då $t = 1$ och $(x, y, z) = (3, -1, 1)$, som är skärningspunkten.

- d) Planens skärningslinje ges på motsvarande sätt av lösningarna till systemet av de två planens ekvationer:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Överför genom radoperationer detta system till trappstegsform:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

z är fri variabel, vi kallar den för t och får

$(x, y, z) = (8, 2, 0) + t(-1, 1, 1)$, som är skärningslinjens ekvation(er).

Svar: a) $(1, -1, 2)$ b) $x - y + 2z = 6$, c) $(3, -1, 1)$, d) $(x, y, z) = (8, 2, 0) + t(-1, 1, 1)$