Sommarmatte

Matematiska Vetenskaper

2 juni 2008

Innehåll

Välkommen till Sommarmatte!

Detta material ska hjälpa dig förstärka dina matematikkunskaper från gymnasiet så du kan räkna obehindrat och koncentrera dig på det som är nytt när du kommer till högskolekurser.

Texten finns både i tryckt form och på kursens webplats

www.matematiskavetenskaper.se

Innehållet är likadant, så du kan ta med dig kompendiet i ryggsäcken eller läsa på skärmen. Vi har försökt ge en repetition av de viktigaste momenten i gymnasiets matematik, med nya infallsvinklar som gör dig bättre förberedd för högskolans matematik.

Hur använder du materialet?

Börja med innehållsförteckningen. Känner du igen det mesta? Vet du vad du har ganska bra koll på och vad som kommer att kräva mer repetition för dig? Gör en realistisk tidsplan för hur du börjar, och sätt igång, med pennan i handen och papper bredvid så du kan tänka med både huvudet och handen. Texten är tätare skriven än vad de flesta gymnasieböckerna är. Lär du dig att läsa den, så har du kommit en bra bit mot att kunna studera i högskoleböcker.

Om du känner att du redan kan materialet i ett avsnitt kan du gå till övningarna först och testa dig. Du hittar facit efter kurstexten. Går det bra, så kan du fortsätta med motsvarande prov på webben. På många ställen, från negativa tal till Pythagoras sats och exponentialfunktioner, har vi försökt presentera nya sidor hos kunskap som du redan besitter, så läs texten noga även om du klarar uppgifterna och provet. Då har du chansen att komma ett steg längre och få nya insikter.

Känner du att du behöver grundligare repetition på ett avsnitt, eller att texten förutsätter saker som du inte kan, så är det dags att vända dig till en lärobok för gymnasieskolan, en repetitionsbok, eller någon Internetreferens (se referensförslag på kursens webplats).

Fastnar du med ett begrepp eller en uppgift, ställ en fråga på kursens "chat" eller kontakta våra mentorer som hjälper dig att komma vidare!

Lycka till med Sommarmatten!

Göteborg, 2 juni 2008

Stefan Lemurell, Carl-Henrik Fant, Laura Fainsilber

1 Aritmetik och Algebra

I detta kapitel skall vi först arbeta med grundläggande aritmetik, alltså de fyra räknesätten, för olika typer av tal. Detta lägger en stabil grund för algebra, som här innebär grundläggande räkning med symboler vilket vi behandlar i slutet av kapitlet.

Alla räkneregler som används i algebraiska räkningar, har sin bakgrund i hur man räknar med tal. Alla reglerna kan därför förklaras genom att man utgår från aritmetiken. Oftast räcker det att utgå från ett exempel, om man samtidigt övertygar sig om att exemplet är allmängiltigt. Även om du kan vissa regler utantill, som ”*minus minus är plus*”, så vinner du i längden på att kunna förklara varför regeln gäller.

Vi rekommenderar att du *inte* använder räknare eller formelsamling då du löser uppgifterna. De kunskaper du får genom att dels räkna själv och tänka på vilka räkneregler du använder och dels lära dig en del fakta i stället för att förlita dig på formelsamlingen, är oerhört värdefulla för dina fortsatta studier. I många matematikutbildningar förväntas du klara dig utan hjälpmedel.

1.1 Räkning med naturliga tal och heltal

De *naturliga talen* är talen $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\cdots$. (De tre avslutande punkterna i listan indikerar att mönstret fortsätter utan slut.) De *negativa heltalen* är $-1,\ -2,\ -3,\ -4\cdots$. Ibland skriver man negativa tal med en parentes: $(-1),\ (-2),\ (-3),\ (-4)\cdots$.

I detta kapitel skriver vi minustecknet lite upphöjt för att det inte skall se ut likadant som subtraktionstecknet: $^{-}1,\ ^{-}2,\ ^{-}3,\ ^{-}4,\cdots$. Vi vill poängtera att det handlar om ett speciellt tal, eller en operation på ett tal, och inte subtraktion. Men det händer, speciellt längre fram i kapitlet, att minustecknet skrivs på vanligt sätt. Från och med kapitel 2 förekommer inte det upphöjda minustecknet. Naturligtvis kan du själv skriva som du är van. I proven på webben skall du skriva t.ex. -3.

De naturliga talen och de negativa talen bildar tillsammans *heltalen*
$\cdots{}^{-}4,\ ^{-}3,\ ^{-}2,\ ^{-}1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\cdots$.

Ofta talar man om *mängden* av alla naturliga tal. Ordet mängd, används här på ett matematiskt sätt. I normalsvenska betyder ordet *ett stort antal* eller *en mätbar ansamling*. En matematisk mängd är en samling objekt, element. Mängden av de naturliga talen har alltså som element naturliga tal. Talet 13 är ett element i mängden, liksom varje annat naturligt tal. Mängden av alla naturliga tal betecknas ofta $\mathbb{N}$. Vill vi poängtera att 13 är ett naturligt tal kan vi skriva $13 \in \mathbb{N}$ (läses: 13 tillhör de naturliga talen).

På samma sätt talar man om mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$, mängden av alla negativa heltal $\mathbb{Z}_{-}$ och mängden av alla positiva heltal $\mathbb{Z}_{+}$. (Notera att 0 varken är ett positivt eller ett negativt tal.)

1.1.1 Naturliga tal

Naturliga tal kan adderas och multipliceras. Vid addition och multiplikation gäller det man kallar *kommutativitet*: $a + b = b + a$ och $a \cdot b = b \cdot a$ för alla naturliga tal a och b.

Om fler än två tal skall adderas vet vi att additionen kan ske i vilken ordning som helst med samma resultat. Vi tänker ofta inte ens på att man utför flera operationer och väljer ordningen. Summan av talen 3, 6 och 13 är 22 hur vi än räknar. Vill man skriftligt redovisa ordningen på additionerna används parenteser tillsammans med *första prioritetsregeln: operationen inom parentes utförs först*: $3 + (6 + 13) = 3 + 19$, $(3 + 6) + 13 = 9 + 13$. Om inga parenteser skrivits ut gäller *läsriktningsprioritet*, den vänstra additionen utförs först. $3 + 6 + 19$ är samma som $(3 + 6) + 13$

Vid addition och multiplikation gäller *associativitet*: $a + (b + c) = (a + b) + c$ och $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ för alla naturliga tal a, b och c.

Då både addition och multiplikation är inblandade, som i beräkningen av $3 + 4 \cdot 7$, kommer prioritetsregeln *multiplikation före addition* in: $3 + 4 \cdot 7 = 3 + 28$. Här gäller alltså *inte* läsriktningsprioritet.

Vill vi att additionen skall utföras först krävs parenteser: $(3 + 4) \cdot 7 = 7 \cdot 7$. Denna uträkning kan också göras med *distribution*: $(3 + 4) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 21 + 28$

Vid addition följt av multiplikation gäller *distributivitet*: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ för alla naturliga tal a, b och c.

Vill man förstå räkneregler som $a - (b - c) = (a - b) + c$ är det också enkelt att utgå från ett exempel: Vi skall beräkna $14 - (6 - 2)$. Om vi då först beräknar $14 - 6$ så har vi subtraherat 2 för mycket. Alltså är $14 - (6 - 2) = (14 - 6) + 2$. Addition och subtraktion har samma prioritet. Med läsriktningsprioritet kan vi därför skriva det senare utan parenteser: $14 - (6 - 2) = 14 - 6 + 2$. Generellt $a - (b - c) = a - b + c$, som är första exemplet på *minus minus är plus*.

På samma sätt kan man inse att $a - b - c = a - (b + c)$ för alla naturliga tal a, b och c.

Nu några ord om division av naturliga tal. För att underlätta polynomdivision längre fram, är det värdefullt att kunna utföra lång division av naturliga tal för hand, t.ex. med hjälp av uppställning i ”liggande stolen” eller ”trappan”. Vilken man väljer är helt oviktigt, algoritmen är samma. Här nedan används ”liggande stolen”.

Kvot	
Täljare	**Nämnare**

Exempel. Vi önskar beräkna $8476 \div 23$. (Här används $\div$ som divisionstecken.)

Lösning.

För att det skall vara enklare att följa kalkylerna redovisas varje steg i en ny ”stol”. En förklaring ges efter exemplet.

$$
\begin{array}{l}
\textbf{Kvot} \\
\hline
8476 \;\big|\; 23
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3 \\
\hline
8476 \;\big|\; 23 \\
-\underline{69} \\
15
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
36 \\
\hline
8476 \;\big|\; 23 \\
-\underline{69} \\
157 \\
-\underline{138} \\
19
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
368 & \\
\hline
8476 \;\big|\; 23 & \\
-\underline{69} & \\
157 & \\
-\underline{138} & \\
196 & \\
-\underline{184} & \\
12 & \textbf{Rest}
\end{array}
$$

Vi ser här att $8476 \div 23 = 368$ rest 12. □

Om du tycker att algoritmen är svårbegriplig eller krånglig kan du kanske ha hjälp av följande förklaring:

Multiplikation och division av naturliga tal är motsatta operationer. Alltså: eftersom $6 \cdot 7 = 42$ så är $42 \div 7 = 6$. Men multiplikation är samma som upprepad addition: $6 \cdot 7 = 42$ *eftersom* $7+7+7+7+7+7 = 42$. Division är därför samma som upprepad subtraktion: $42 \div 7 = 6$ *eftersom* $42-7-7-7-7-7-7 = 0$. (De gamla mekaniska räknemaskinerna byggde helt på denna princip.) Om divisionen inte går jämnt ut får man en *rest*. $45-7-7-7-7-7-7 = 3$ alltså $42 \div 7 = 6$ med rest 3.

Det är väldigt opraktiskt att subtrahera talet 23 från talet 8476 mer än 300 gånger. Därför effektiviserar man genom att först räkna ut hur många hundra gånger 23 går i 8476.

Eftersom $84 \div 23 = 3$ rest 15 går 23 minst 300 gånger i 8476, men inte 400 gånger. Vi kan därmed skriva hundratalssiffran 3 i kvoten och subtrahera $300 \cdot 23$ från 8476.

Vi har att $84 - 3 \cdot 23 = 15$ och $8476 - 300 \cdot 23 = 1500 + 76 = 1576$. I den andra ”stolen” är inte nollorna utskrivna, de är underförstådda. I den tredje stolen tas inte siffran 6 med i resten 1576. Det betyder inget, men man brukar göra så eftersom den inte kommer in i kalkylerna i detta steg.

$157 \div 23 = 6$ rest 19. Alltså går 23 minst 60 gånger i 1576, men inte 70 gånger. $157 - 6 \cdot 23 = 19$ och $1576 - 60 \cdot 23 = 190 + 6 = 196$. Vi kan nu skriva tiotalssiffran 6 i kvoten.

Slutligen $196 \div 23 = 8$ rest 12. Alltså är $196 = 8 \cdot 23 + 12$ och kvotens entalssiffra är 8.

Kalkylerna ovan kan sammanföras: $8476 = 300 \cdot 23 + 1576 = 300 \cdot 23 + 60 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 8 \cdot 23 + 12 = 368 \cdot 23 + 12$. Alltså $8476 \div 23 = 368$ rest 12.

Testövning

1. Beräkna $937 \div 31$
2. Beräkna $427 \div 23$

Svar:

1. 30 rest 7
2. 18 rest 13

1.1.2 Negativa tal

Addition av naturliga tal är ju direkt sammankopplad med antalsräkning och därmed (nästan) en medfödd mänsklig förmåga. Eftersom de övriga räknesätten för naturliga tal bygger på addition, kan de också anses medfödda.

Då det gäller negativa tal är situationen annorlunda: de är objekt man *definierar* med hjälp av de naturliga talen. Till varje naturligt tal a införs ett negativt (motsatt) tal ^-a. Man måste sedan *definiera* hur man skall räkna med dessa nya objekt. Att göra det i detalj här skulle ta mycket utrymme, men vi skall ändå försöka ge en lagom repetition och kanske fördjupning.

Man måste först definiera addition på ett sådant sätt att det leder till
$7 + {}^-3 = 7 - 3 = 4$, $4 + {}^-7 = {}^-(7 - 4) = {}^-3$, ${}^-5 + 7 = 7 - 5 = 2$, ${}^-5 + 3 = {}^-(5 - 3) = {}^-2$ och ${}^-5 + {}^-3 = {}^-(5 + 3) = {}^-8$.

Det är ganska lätt att argumentera för att ovanstående är enda rimliga additionen. Men det är en *definition*, något man har bestämt.

Det är inte självklart, men antagligen inte överraskande, att additionen, även med negativa tal, är associativ: $a+(b+c) = a+b+c$. Den är också kommutativ $a+b = b+a$. Båda dessa egenskaper kan man *bevisa*.

Av $7 + {}^-3 = 7 - 3$ följer att subtraktion för naturliga tal kan ersättas av en addition: Om a och b är naturliga tal sådana att $a > b$ så gäller $a - b = a + {}^-b$.

Om vi låter ${}^-b$ beteckna det motsatta talet till b även då b är negativt, ${}^-({}^-3) = 3$ (*minus minus är plus*), skall vi se att all subtraktion kan erhållas genom addition av motsatt tal.

Sats: För alla heltal a och b gäller det att $a - b = a + {}^-b$.

Bevis: Subtraktion kan ses som uppdelning av tal eller lösning till en ekvation:
$a - b$ är det (unika) tal x som uppfyller $x + b = a$.

Vi ser att $x = a + {}^-b$ är lösning till ekvationen eftersom $(a + {}^-b) + b = a + ({}^-b + b) = a + 0 = a$. Att det inte finns någon annan lösning ser vi genom att addera ${}^-b$ till båda sidor av likheten: $(x + b) + {}^-b = a + {}^-b$.

Eftersom additionen är associativ och $b + {}^-b = 0$ så följer att vänsterledet är $(x + b) + {}^-b = x + 0 = x$ och därmed $x = a + {}^-b$. $\square$

Också multiplikation för heltal måste *definieras*. Precis som vid addition måste man tänka på alla kombinationer av naturligt och negativt.

$4 \cdot {}^{-}7 = {}^{-}(4 \cdot 7) = {}^{-}28, \quad {}^{-}5 \cdot 7 = {}^{-}(5 \cdot 7) = {}^{-}35, \quad$ och $\quad {}^{-}5 \cdot {}^{-}3 = 5 \cdot 3 = 15,$ (*minus minus är plus*).

Återigen är det ganska lätt att argumentera för att ovanstående är enda rimliga multiplikationen. Men det är en *definition*, något man har bestämt.

Det är inte heller självklart, men bevisbart, att samma räkneregler gäller för heltalen som för de naturliga talen. I läroböcker använder man ofta vissa av räknereglerna för att förklara hur multiplikation måste gå till. Det finns nämligen inget annat sätt att räkna om man vill att räknereglerna skall fortsätta gälla.

Testövning

1. Beräkna $5 - ({}^{-}4 - 7)$
2. Beräkna ${}^{-}5 \cdot ({}^{-}4 - 3)$
3. Beräkna ${}^{-}5 \cdot {}^{-}4 - 3$

Svar:

1. 16
2. 35
3. 17

1.1.3 Räkneregler

Här sammanfattas de prioritetsregler och räkneregler som behandlats i kapitlet.

Prioriteringsordning

1. Operation mellan parenteser.
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion
4. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

Räkneregler

För alla heltal a, b och c gäller det att

- $a + b = b + a$ *kommutativitet*
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ *associativitet*
- $a - (b - c) = a - b + c$ *minus minus är plus*
- $a - (b + c) = a - b - c$
- $a + {}^{-}a = 0$
- ${}^{-}({}^{-}a) = a$ *minus minus är plus*
- $a \cdot b = b \cdot a$ *kommutativitet*
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *associativitet*
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *distributivitet*
- $a \cdot {}^{-}b = {}^{-}(a \cdot b)$
- ${}^{-}1 \cdot a = {}^{-}a$
- ${}^{-}a \cdot {}^{-}b = a \cdot b$ *minus minus är plus*

1.1.4 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1a

1.1.1 Bestäm kvot och rest till

a) $7956 \div 21$ b) $7497 \div 21$

c) Är något av talen 7956 eller 7497 delbart med 21?

1.1.2 Beräkna

a) $7 - {}^{-}2 \cdot (3 - 9) \cdot ((2 + {}^{-}5 - 8) \cdot ({}^{-}3 - {}^{-}5) - 4)$

b) $({}^{-}4 - 2) \cdot (({}^{-}6 - {}^{-}9) - ((6 - {}^{-}7 + 3) \cdot ({}^{-}2 - 3) + {}^{-}1 \cdot (7 - {}^{-}4)))$

1.1.3 Skriv följande utan parenteser och utan negativa (motsatta) tal.

a) $a - {}^{-}b \cdot (a + 1) - b \cdot ({}^{-}a + 1)$

b) $({}^{-}a \cdot {}^{-}b + a \cdot (b - 2 \cdot {}^{-}a)) \cdot ({}^{-}1 + b)$

1.2 Bråkräkning

1.2.1 De rationella talen

Rationella tal eller *bråktal* skrivs $\frac{p}{q}$, där p och q är heltal och $q \neq 0$. Några exempel på rationella tal är $\frac{3}{7}, \frac{{}^{-}5}{34}, \frac{{}^{-}5}{{}^{-}12}, \frac{7}{1}, \frac{1}{7}$.

Om s är ett heltal så är de två bråktalen $\frac{p}{q}$ och $\frac{s \cdot p}{s \cdot q}$ lika. Man säger att bråktalet $\frac{p}{q}$ *förlängts* med (faktorn) $s \neq 0$ till $\frac{s \cdot p}{s \cdot q}$, eller att $\frac{s \cdot p}{s \cdot q}$ *förkortats* med s till $\frac{p}{q}$.

Talen $\frac{7}{11}$ och $\frac{14}{22}$ är lika eftersom $\frac{7}{11} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \frac{14}{22}$.

Man kan förlänga/förkorta med negativ faktor också:

$\frac{{}^{-}7}{{}^{-}11} = \frac{{}^{-}1 \cdot 7}{{}^{-}1 \cdot 11} = \frac{7}{11}, \quad \frac{7}{{}^{-}11} = \frac{{}^{-}1 \cdot 7}{{}^{-}1 \cdot {}^{-}11} = \frac{{}^{-}7}{11}$.

I allmänhet försöker man ange bråktal på enklaste formen så att täljaren p och nämnaren q inte har någon gemensam faktor (utom 1 eller ${}^{-}1$).

Man kan välja att ge talet på blandad form istället för ren bråkform. I så fall skriver man $3\frac{1}{4}$ istället för $\frac{13}{4}$. Det är emellertid lätt att missuppfatta den blandade formen och läsa $3 \cdot \frac{1}{4}$ som är $\frac{3}{4}$.

Mängden av alla rationella tal brukar betecknas $\mathbb{Q}$.

Talet $\frac{p}{1}$ identifieras med heltalet p. På det viset är alla heltal också rationella tal. Mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$, är en *delmängd* av mängden av alla rationella tal, $\mathbb{Q}$. Detta skrivs $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

1.2.2 Räkning med rationella tal

Addition och subtraktion av bråktal utförs genom att de två termerna skrivs med gemensam nämnare:

$\frac{7}{12} + \frac{39}{15} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 39}{4 \cdot 15} = \frac{35}{60} + \frac{156}{60} = \frac{35 + 156}{60} = \frac{191}{60}$.

Generellt är

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{d \cdot a + b \cdot c}{d \cdot b}$$

Det är en god vana att inte förlänga med mer än nödvändigt. Då man arbetar med rationella funktioner, se avsnitt 4.3, blir det extra viktigt.

Om man följer den allmänna principen vid addition av $\frac{7}{12}$ och $\frac{39}{15}$ får man

$$\frac{7}{12} + \frac{39}{15} = \frac{15 \cdot 7}{15 \cdot 12} + \frac{12 \cdot 39}{12 \cdot 15} = \frac{105}{180} + \frac{468}{180} = \frac{105 + 468}{180} = \frac{573}{180}.$$

Här kan och bör man förkorta med 3 som är den gemensamma faktorn i de två nämnarna 12 och 15.

Eftersom $\frac{a}{b} + \frac{^-a}{b} = \frac{a + {^-a}}{b} = \frac{0}{b} = 0$ är det logiskt att kalla $\frac{^-a}{b}$ det motsatta talet till $\frac{a}{b}$ och skriva $\frac{^-a}{b} = {^-}\left(\frac{a}{b}\right)$

Subtraktion av bråktal görs på motsvarande sätt som addition:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a - b \cdot c}{d \cdot b},$$

men man kan, som då man subtraherar heltal, addera det motsatta talet istället:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + {^-}\left(\frac{c}{d}\right).$$

$$\frac{7}{12} - \frac{39}{15} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 12} - \frac{4 \cdot 39}{4 \cdot 15} = \frac{35}{60} - \frac{156}{60} = \frac{35 - 156}{60} = {^-}\frac{121}{60}.$$

Multiplikation av rationella tal definieras av:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Att denna definition är den enda rimliga kan man motivera på följande sätt:

- Multiplikation med heltal skall motsvara upprepad addition.

  Alltså är $3 \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{c}{d} + \frac{c}{d} = \frac{3 \cdot c}{d}$

- Vidare skall multiplikation vara associativ. Alltså är $\frac{c}{d} = \frac{7}{7} \cdot \frac{c}{d} = 7 \cdot \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{c}{d}\right)$.

  Men detta är möjligt endast om $\frac{1}{7} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{7 \cdot d}$.

- Tillsammantaget ger detta $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) = a \cdot \frac{c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Division av rationella tal ges av

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Detta motiveras av att division är den till multiplikation motsatta operationen:
Eftersom $3 \cdot 4 = 12$ så är $12 \div 4 = 3$.

Så kan vi resonera också då det gäller rationella tal:

Eftersom $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ så är $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Speciellt är $13 \div 4 = \frac{13}{1} \div \frac{4}{1} = \frac{13 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{13}{4}$.
I kapitel 1.1.1 skulle vi sagt att $13 \div 4 = 3$ rest 1. Då handlar det om *heltalsdivision* som speglar t.ex. en fördelning: *om tretton ägg skall fördelas på kartonger som rymmer fyra ägg vardera så får man tre fulla kartonger och ett ägg över.* I detta kapitel handlar det om division för rationella tal. Alla rationella tal kan divideras, kvoten är alltid ett rationellt tal.
Likheten $13 \div 4 = \frac{13}{4}$ motiverar/förklarar användandet av bråkstrecket som divisionssymbol.

Det är ofta praktiskt och bekvämt att använda bråkstrecket som divisionssymbol. Det gäller bara att veta vad $\frac{a}{b}$ betyder. Är det ett bråk*tal* alltså ett rationellt tal, eller är det ett *bråk* alltså en division? $\frac{3}{4}$ är ett rationellt tal, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ är ett bråk men inte ett rationellt tal.

Ibland orskar användningen av bråkstreck som divisionssymbol felläsning/feltolkning:
Vi har att $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \cdot c}$ men $a \div \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$. Därför är det viktigt att veta vad som avses då man använder ”dubbelbråk”. Att $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ och $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ inte är samma sak, syns lätt i tryckt text, men inte lika lätt i handskriven text. Här rekommenderas därför att man använder annan divisionssymbol $\div$ eller $/$ eller förtydligande parenteser.

Tänk också på att ett dubbelbråk ofta innehåller ”osynliga parenteser”, vilket illustreras i nästa exempel.

Exempel. Vi skall skriva $\frac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}}$ som ett bråktal på enklaste form.

Lösning. $\frac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}} = \left(\frac{1}{7}-\frac{3}{11}\right) \div \left(\frac{2}{63}+\frac{11}{18}\right) =$

$$\left(\frac{1\cdot 11}{7\cdot 11}-\frac{3\cdot 7}{11\cdot 7}\right) \div \left(\frac{2\cdot 2}{7\cdot 9\cdot 2}+\frac{11\cdot 7}{2\cdot 9\cdot 7}\right) = \left(\frac{11-21}{11\cdot 7}\right) \div \left(\frac{4+77}{2\cdot 9\cdot 7}\right) =$$

$$\frac{{}^{-}10\cdot 2\cdot 9\cdot 7}{11\cdot 7\cdot 81} = {}^{-}\frac{20}{99}$$ □

1.2.3 Räkneregler

Här sammanfattas de räkneregler som gäller för rationella tal. De som tidigare behandlats för heltalen gäller även för de rationella talen.

Räkneregler

För alla rationella tal, $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a}{d\cdot b}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
- $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

1.2.4 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1b

1.2.1 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\frac{5040}{40320}$ b) $\frac{6182}{{}^{-}616}$ c) $\frac{{}^{-}42\cdot 308\cdot 230}{{}^{-}60\cdot 121\cdot {}^{-}69}$

d) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$ e) $3\frac{1}{4}+2\frac{5}{6}+4\frac{3}{8}$ f) $2\frac{15}{17}-3\frac{1}{5}+1\frac{2}{3}$

1.2.2 Skriv följande rationella tal på enklaste form och blandad form

a) $\frac{1}{4}-(1\frac{1}{3}-2\frac{1}{6})$

b) $2\frac{1}{4}-3\frac{1}{5}-\left(4\frac{11}{21}-3\frac{5}{7}\right)+\left(3\frac{1}{5}-1\frac{7}{15}\right)$

1.2.3 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\frac{1}{7}\div\frac{4}{7}$ b) $\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{24}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{38}{17}$

c) $2\frac{1}{6}\cdot 3\frac{3}{4}\div 4\frac{7}{12}$ d) ${}^{-}11\frac{1}{3}\cdot 2\frac{2}{5}\div{}^{-}1\frac{2}{15}$

e) $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20}\right)\div\left(\frac{9}{100}\cdot\frac{5}{19}\right)$ f) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20}\div\frac{9}{100}\cdot\frac{5}{19}$

g) $\left(\frac{77}{8}\div\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{24}{13}\div\frac{6}{11}\right)$ h) $\frac{77}{8}\div\frac{4}{3}\div\frac{24}{13}\div\frac{6}{11}$

1.2.4 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)$ b) $\dfrac{3\frac{5}{6}-2\frac{7}{8}}{4\frac{5}{11}-3\frac{1}{6}}$

c) $\dfrac{3\frac{1}{4}-2\frac{7}{12}}{1\frac{1}{5}-\frac{2}{7}}-\dfrac{1\frac{2}{11}-\frac{8}{9}}{\frac{23}{99}}\cdot 1\frac{5}{41}$

1.3 Potenser med heltalsexponent

1.3.1 Potenser

I detta kapitel introduceras begreppet potens för rationella tal, och därmed naturligtvis för alla heltal. Exponenten är här heltal men längre fram (i kapitel 1.7) kommer exponenten att vara ett rationellt tal och slutligen ett reellt tal. De räknelagar som presenteras i kapitlet är allmängiltiga, de gäller även med reella exponenter.

1.3.2 Potens med heltalsexponent

Potenser med *heltalsexponenter* definieras av

$a^0 = 1 \quad (\text{för } a \neq 0), \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a,$
$a^n = a \cdot a^{n-1} = a \cdot a \cdots a, \quad$ (produkten av n faktorer då n är ett positivt heltal.)

Vidare definierar man $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ då n är ett positivt heltal och $a > 0$.

I definitionen ovan kan n bara vara ett heltal men a kan vara såväl ett heltal som ett rationellt tal.

Vid beräkning av potenser av negativa tal får man vara extra uppmärksam. De beräknas naturligtvis på samma sätt som potenser av positiva tal. ${}^{-}3^4 = {}^{-}3 \cdot {}^{-}3 \cdot {}^{-}3 \cdot {}^{-}3$. Men risken för felläsning är stor varför det är klokt att alltid skriva parentes runt talet: ${}^{-}3^4 = ({}^{-}3)^4$ så att det inte förväxlas med ${}^{-}(3^4)$.

Då $({}^{-}1)^2 = 1$, gäller att: $({}^{-}a)^1 = {}^{-}a$, $({}^{-}a)^2 = a^2$, $({}^{-}a)^3 = {}^{-}(a^3)$ och allmänt

$$({}^{-}a)^n = \begin{cases} a^n & \text{om} \quad n = 2m = \text{jämnt heltal} \\ {}^{-}(a^n) & \text{om} \quad n = 2m+1 = \text{udda heltal.} \end{cases}$$

För potenser av bråktal gäller att $\left(\dfrac{p}{q}\right)^n = \dfrac{p^n}{q^n}$. Också i detta fall är det klokt att använda förtydligande parenteser. Det är annars lätt att uppfatta det som $\dfrac{p^n}{q}$.

Följande potenslagar kan härledas om man skriver upp vad de olika potenserna är. T.ex är $(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3 \cdot 4}$.

1.3.3 Räkneregler

Potensregler

För alla tal a och b gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Vid räkning med potenser gäller prioritetsregeln att potenser beräknas före multiplikation eller division och även före addition eller subtraktion. $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$, $2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$. Som tidigare skall operation inom parenteser beräknas först: $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$, $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$.

Vid upprepad potensberäkning, som i : 2^{3^3}, gäller att exponenten beräknas först:

$2^{3^3} = 2^{(3^3)} = 2^{27} = 134217728, \quad 2^{5+3} = 2^{(5+3)} = 2^8 = 256.$

Också här ger parenteser förtur: $(2^3)^3 = 8^3 = 512$.

En liten **varning!** Det finns ingen standardprioritet för upprepad potensberäkning. Vissa kalkylatorer har ”exponenten först” prioritet, andra har läsriktningsprioritet. 2^{3^3} kan bli antingen 134217728 eller 512, det beror på räknarfabrikatet, ibland t.o.m. på modellen. För säkerhets skull – använd parenteser.

Här är de prioritetsregler som behandlats i kapitlet.

Prioriteringsordning

1. Operation mellan parenteser.
2. Exponent
3. Potens
4. Multiplikation och division
5. Addition och subtraktion
6. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

1.3.4 Övningar

1.3.1 Beräkna

a) 5^2	b) 2^5	c) $(^-3)^4$	d) $(^-4)^3$
e) 1^{100}	f) 100^1	g) 3^0	h) $(^-3)^0$

1.3.2 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a) 2^{-2} b) $(^{-}3)^{-3}$ c) 1^{-5}

1.3.3 Skriv som potenser av 2

a) $1/64$ b) $16^3/2^{10}$ c) $128^3/32^5$

1.3.4 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a) $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-7} \cdot 105 \cdot {}^{-}7^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 5}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(^{-}\frac{3}{7}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{10}\right)^{-3}}{56 \cdot 10^{-6}}$

1.4 Reella tal

Det är ganska komplicerat att definiera vad som menas med ett reellt tal. Det kräver mer avancerad matematik än vad som normalt ingår i en gymnasieutbildning. Vi måste därför hålla oss till en relativt intuitiv och förenklad bild av begreppet. Med ett *reellt* tal menas då ett tal r som ges av en *decimalutveckling*, som beskrivs nedan.

Varje positivt reellt tal har en heltalsdel n, som är ett naturligt tal, och en decimaldel: $r = n.a_1a_2a_3a_4a_5\cdots$, där alla talen a_i är naturliga tal mellan 0 och 9. Detta betyder att $r = n + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{100} + \dfrac{a_3}{1000} + \dfrac{a_4}{10000} + \dfrac{a_5}{100000} + \cdots$.
Till varje positivt reellt tal finns ett motsatt, negativt tal
$^{-}r = {}^{-}n.a_1a_2a_3a_4a_5\cdots = {}^{-}\left(n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \frac{a_5}{100000} + \cdots\right)$.

Genom att bara ta med ändligt många decimaler får vi ett rationellt tal som approximerar det reella talet. Ju fler decimaler dess bättre approximation.

Reella tal kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras, genom att man utför operationerna på de rationella approximationerna. Genom att ta med fler och fler decimaler får man en följd av rationella tal som närmar sig (har gränsvärdet) de reella talens summa, differens, produkt eller kvot.

Två decimalutvecklingar representerar samma reella tal om deras differens är 0. Detta innebär att t.ex. $3.25300000\cdots = 3.25299999\cdots$. (De avslutande punkterna innebär som vanligt att mönstret fortsätter obrutet.)

För att åskådliggöra de reella talen använder man ofta punkter på tallinjen. Inte heller detta är helt oproblematiskt. Vad är en linje och vad är en punkt?

Euklides definierade begreppen punkt, linje och plan på ett sätt som, kanske ger rätt associationer, men ändå är väldigt diffust. En *punkt* är något som inte kan delas. En *linje* är en längd utan bredd. En linjes ändar är punkter. En *rät linje* är en linje som ligger jämnt mellan punkterna på densamma. En *yta* är något som bara har längd och bredd. Ett *plan* är en yta som ligger med de räta linjerna på detsamma.

De definitionerna leder inte till att man kan säga vad ett reellt tal är. Endast naturliga tal, positiva bråktal och vissa (geometriskt konstruerbara) reella tal. Man kan alltså inte definiera ett reellt tal som en punkt på tallinjen. Resonemanget är det omvända. När vi har de reella talen kan vi definiera vad som menas med rät linje, punkt och plan. Då motsvarar varje reellt tal en punkt på linjen och varje punkt motsvarar ett reellt tal.

I praktiken räknar vi bara med rationella approximationer till de reella talen, eller med symboler, som $\sqrt{2}$, som representerar specifika reella tal. Redan de gamla grekerna visste att det inte finns rationella tal x sådana att $x^2 = 2,\ 3,\ 5,\ 6$ m.fl. Man kan numera visa att det däremot finns sådana reella tal.

Mängden av alla reella tal betecknas $\mathbb{R}$. De rationella talen är också reella tal, mängden av alla rationella tal är en *delmängd* av mängden av alla reella tal.
Vi har att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.4.1 Olikheter för reella tal

I likhet med heltalen och de rationella talen finns det tre typer av reella tal, de positiva, de negativa och talet 0. Detta gör det möjligt att definiera begreppen *större än* och *mindre än* för reella tal.

Definition
Det reella talet a är *större än* talet b, skrivs $a > b$, om och endast om $a - b$ är positivt.

Talet a är *mindre än* talet b, skrivs $a < b$, om och endast om $a - b$ är negativt.

För alla reella tal a och b finns därmed tre möjligheter: $a = b$, $a > b$ eller $a < b$.

I detta sammanhang har man ofta användning av en praktisk mängdbeskrivning.

Säg till exempel att vi, av någon anledning, är intresserade av alla de reella tal x som uppfyller villkoret $x < 5$. Då gäller det att beskriva denna mängd av tal på ett praktiskt sätt: $\{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$. De speciella parenteserna $\{$ och $\}$ är mängdparenteser, (vardagligt krullparenteser). De inramar beskrivningen av objekten i mängden. $x \in \mathbb{R}$ innebär att alla objekten skall tillhöra mängden av alla reella tal, kort sagt att alla objekt är reella tal. Kolon : läses *sådana att*. Efter kolontecknet kommer villkoret som skall vara uppfyllt för att ett reellt tal x skall få vara med i mängden. I ord läser man alltså: *mängden av alla reella tal x sådana att x är mindre än* 5.

Vi har att ${}^{-}3 \in \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ och $12 \notin \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$. Talet ${}^{-}3$ tillhör mängden, talet 12 tillhör inte mängden.

De positiva reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, de negativa reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ och de *icke-negativa* reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Mängdbeteckningen kommer vi också att använda för andra grundmängder än de reella talen. Man kan t ex skriva $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$ vilket då betyder mängden av alla heltal vars kvadrat är mindre än 5, dvs $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

När det är klart att det är de reella talen som avses så finns det praktiska beteckningar för intervall. Vi kommer att använda följande beteckningar:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}
\end{aligned}$$

Observera att '(' respektive ')' betyder att ändpunkten **inte** är med och att '[' respektive ']' betyder att ändpunkten är med.

1.4.2 Räkneregler för olikheter

Också för olikheter gäller vissa räkneregler. De kan alla härledas från definitionen. Vi ger här ett exempel på regel och härledning.

Exempel. Vi skall bevisa olikhetsregeln: *Om a och b är reella tal sådana att $a > b$ så gäller det att $a + c > b + c$ för alla reella tal c.*

Lösning. Vi beräknar differensen $(a + c) - (b + c)$ och skall visa att denna är positiv om $a > b$. Men $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$, som är positiv eftersom $a > b$. Vi har därmed visat att $a + c > b + c$ om $a > b$. $\square$

Räkneregler

För alla reella tal $a,\ b,\ c$ och d, gäller det att

- Om $a < b$ och $b < c$ så gäller $a < c$
- Om $a < b$ så gäller $a + c < b + c$
- Om $a < b$ och $c < d$ så gäller $a + c < b + d$
- Om $a < b$ och $0 < c$ så gäller $a \cdot c < b \cdot c$
- Om $a < b$ och $c < 0$ så gäller $a \cdot c > b \cdot c$

1.4.3 Övningar

1.4.1 Gäller det att

a) $2 \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$? b) $2 \leq 3$?

(Symbolen $\leq$ utläses *mindre än eller lika med*. Talet 3 är med i mängden.)

c) Är det någon skillnad på utsagorna i (a) och (b) ovan?

1.4.2 Visa att räknereglerna för olikheter i avsnitt 1.4.2 gäller genom att använda metoden som presenteras i exemplet i samma avsnitt.

1.4.3 Ge exempel på reella tal $a,\ b,\ c$ och d sådana att

$a < b$ och $c < d$ men där $a - c < b - d$ *inte* gäller.

1.5 Absolutbelopp

I detta kapitel skall vi arbeta med en av grundläggande operationerna på reella tal, absolutbelopp. Detta återkommer i kapitel 4.4 då vi studerar funktioner.

Definition: Om a är ett reellt tal så är *absolutbeloppet* av a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om} \quad a \geq 0 \\ {}^{-}a & \text{om} \quad a < 0 \end{cases}$$

Tänk på att ${}^{-}a$ är det motsatta talet till a. Om a är negativt så är ${}^{-}a$ positivt. Som exempel är $|{}^{-}3| = {}^{-}({}^{-}3) = 3$

Av definitionen följer direkt att $|a| \geq 0$ för alla reella tal a. Absolutbeloppet av a talar om hur långt från punkten 0 som punkten a ligger på tallinjen.

Om a och b är två reella tal så är $|a - b|$ avståndet mellan a och b på tallinjen. Vi har t.ex. att ${}^{-}7$ och 3 ligger på avståndet 10 från varandra, $|{}^{-}7 - 3| = |{}^{-}10| = 10$.

Exempel. Vi söker de tal b som uppfyller $|3 - b| = 5$.

Lösning. Vi söker de punkter på tallinjen, som ligger på avståndet 5 från 3. Det är två punkter, en till höger om 3, nämligen $3 + 5 = 8$, och en till vänster, $3 - 5 = {}^{-}2$. $\square$

Exempel. Vi söker de tal b som uppfyller $|3 - b| \leq 5$.

Lösning. Nu söker vi de punkter på tallinjen, som ligger på avstånd *högst* 5 från 3. Det är alla punkter som ligger *mellan* 3 och $3 + 5 = 8$, eller *mellan* 3 och $3 - 5 = {}^{-}2$. Alltså alla punkter mellan ${}^{-}2$ och 8.

Med mängdskrivsättet har vi $\{x \in \mathbb{R} : |3 - b| \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : {}^{-}2 \leq x$ och $x \leq 8\}$.

Ett alternativt sätt att skriva ${}^{-}2 \leq x$ och $x \leq 8$ är ${}^{-}2 \leq x \leq 8$. $\square$

1.5.1 Övningar

1.5.1 Bestäm

a) $|7|$ b) $|{}^{-}7|$ c) $|0|$

1.5.2 Bestäm alla reella tal x sådana att

a) $|x + 1| = 1$ b) $|3 - x| = 7,5$ c) $|x + 4| = 0$

d) $|3 - 2x| = 5$ e) $|x - 2| = {}^{-}2$

1.5.3 Ange (utan beloppstecken) de x, som satisfierar

a) $|x - 1| \leq 2$ b) $|x + 3| < 5$ c) $2 < |x - 2| \leq 3$

d) $|x + 2| \leq 0$

1.6 Kvadratrötter

Vi fortsätter nu med den andra av de grundläggande operationerna på reella tal, kvadratroten. Också till denna återkommer vi i kapitel 4 då vi studerar funktioner.

1.6.1 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom produkten av såväl två positiva tal, som två negativa tal, är positiv så gäller det att

$x^2 = x \cdot x \geq 0$ för alla reella tal x.

Alltså har ekvationen $x^2 = b$ ingen reell lösning om $b < 0$.

I avsnitt 1.4 behandlades svårigheterna med att avgöra huruvida det talsystem man arbetar med räcker till för att lösa en viss ekvation. Men som påpekades där så har ekvationen $x^2 = b$ alltid reell lösning om $b > 0$. I själva verket alltid två. Som exempel har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna 3 och $^-3$.

Definition: Med $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b.

Alltså är $\sqrt{9} = 3$ och inte $^-3$ eller ± 3. Det gäller också att $\sqrt{0} = 0$.

Enligt definitionen har vi alltså att $(\sqrt{b})^2 = b$.

Men det gäller också att $(^-\sqrt{b})^2 = {}^-\sqrt{b} \cdot {}^-\sqrt{b} = (\sqrt{b})^2 = b$.

Alltså gäller det att:

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika reella rötter: $\sqrt{b}$ och $^-\sqrt{b}$

Man skriver ibland $x^2 = b \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, för $b \geq 0$. Med detta menas alltså att ekvationen har rötterna $x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = {}^-\sqrt{b}$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 9$ har således rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, d.v.s. $x_1 = 3$ och $x_2 = {}^-3$. □

1.6.2 Räkneregler

Av definitionen på $\sqrt{b}$ följer vissa **räkneregler**:

- $(\sqrt{a})^2 = a$ för $a \geq 0$.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a

  alltså: $\sqrt{a^2} = a$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2} = {}^-a$ om $a < 0$.
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$ och alla a.

  alltså: $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2 \cdot b} = {}^-a \cdot \sqrt{b}$ om $a < 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, om $a > 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$ $a \neq b$, $a,\ b > 0$.

Den första punkten följer direkt av definitionen:
$\sqrt{a}$ *är* det icke negativa tal vars kvadrat är a.

Punkt två kan bevisas genom att vi konstaterar att $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ och att $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$.

Alltså är $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

På samma sätt bevisas regeln för roten ur en kvot och de två efterföljande reglerna.

Den femte regeln följer av $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

De två sista reglerna kallas **förlängning med konjugatuttryck** eftersom $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ och $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ kallas konjugatuttryck till varandra.

Den första av av dem följer av $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} =$

(konjugatregeln se avsnitt 1.9) $= \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ för $a \neq b$, a och $b > 0$.

OBS: I allmänhet, alltså för de flesta tal a och b, är $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Till exempel ger $a = b = 1$ att $\sqrt{a + b} = \sqrt{2}$ medan $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$.

På samma sätt är i allmänhet $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Exempel.

(a) Ekvationen $4x^2 - 3 = 0$, d.v.s. $x^2 = 3/4$ har rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{3/4} = \pm\sqrt{3}/2$

(b) $\sqrt{(^-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = |^-3|$

(c) För $a > 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$

(d) För $a < 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{b} = {}^-(^-a)\sqrt{b} = {}^-\sqrt{(^-a)^2 \cdot b} = {}^-\sqrt{a^2 \cdot b}$

(e) För $a > 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$

(f) För $a < 0, b < 0$ är $a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = {}^-(^-a)\sqrt{\frac{b}{a}} = {}^-\sqrt{(^-a)^2 \cdot \frac{b}{a}} = {}^-\sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = {}^-\sqrt{ab}$

(g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(h) Vi skriver $\dfrac{1}{5+\sqrt{6}}$ med heltalsnämnare.

Lösning. Multiplicera med konjugatuttrycket:

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}} = \frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5-\sqrt{6}}{25-6} = \frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

□

1.6.3 Övningar

1.6.1 Förenkla

a) $\sqrt{0,49}$ b) $\sqrt{90000}$ c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{75}$ d) $\sqrt{10}/\sqrt{125}$

e) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ f) $\sqrt{2} - \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16} - \sqrt{32} + \sqrt{64}$.

1.6.2 Lös ekvationen

a) $x^2 - 25 = 0$ b) $5 - x^2 = 0$ c) $9x^2 - 4 = 0$ d) $16 - 6x^2 = 0$

e) $x^2 = 0$

1.6.3 Skriv med heltalsnämnare

a) $2/\sqrt{6}$ b) $3/\sqrt{21}$ c) $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

d) $2/(\sqrt{11}-3)$ e) $1/(2-\sqrt{5})$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

1.7 n:te roten ur ett reellt tal

Man kan visa att, om $b \geq 0$ och n är ett positivt heltal, så finns, i likhet med fallet $n = 2$, precis ett icke-negativt tal a så att $a^n = b$. Om n är ett jämnt tal så gäller också att $(^-a)^n = b$. Om n är ett udda tal så gäller istället att $(^-a)^n = {}^-b$. Detta leder till följande definition av n-te roten ur ett icke-negativt tal.

1.7.1 n-te roten ur reella tal

Definition: Om n är ett positivt heltal och b är ett reellt tal ≥ 0, så menas med $\sqrt[n]{b}$ det rella tal ≥ 0, som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Om b är ett negativt tal och n är ett positivt, udda heltal så menas med $\sqrt[n]{b}$ det *negativa* tal som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Ekvationen $x^n = b$, där b reellt tal och n är ett positivt heltal, har då följande *reella rötter*:

1) $x = \sqrt[n]{b}$, om $n = 2m + 1 =$ *udda* (positivt) heltal,

2) $x = \pm\sqrt[n]{b}$, om $b \geq 0$ och $n = 2m =$ *jämnt* (positivt) heltal.

(Om n är *jämnt* och $b < 0$, så saknar $x^n = b$ reella rötter och $\sqrt[n]{b}$ är *inte* definierat.)

För *udda* $n = 1, 3, 5, \ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{^-b} = {}^-\sqrt[n]{b}$.

Definitionen äv $\sqrt[n]{b}$ gäller även för $n = 1$, vi har då att $\sqrt[1]{b} = b$ för alla reella tal b.

Exempel.
Eftersom $2^4 = 16$ och $5^3 = 125$ så är $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{125} = 5$ och $\sqrt[3]{^-125} = {}^-5$. □

1.7.2 Räkneregler

Följande *räkneregler* för *n:te rötter* bevisas på samma sätt som motsvarande regler för kvadratroten.

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ för $a \geq 0$ om n är jämnt, för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ om n är jämnt.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ och $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Exempel.

(a) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6\cdot 3]{2} = \sqrt[18]{2}$

(b) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[4\cdot 3]{5^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt[4]{5}$

(c) $\sqrt[2n]{a^2} = \sqrt[n]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[n]{|a|}$ □

För uttrycken $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a+b}$ och $\sqrt[n]{a-b}$ finns inga allmänna formler. Exempelvis är i allmänhet $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

1.7.3 Övningar

1.7.1 Förenkla

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt[6]{8}$ c) $\sqrt[3]{-24}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ e) $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$

g) $4/\sqrt[3]{16}$ h) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.7.2 Bestäm de *reella* rötterna till

a) $x^8 = 16$ b) $x^5 = 243$ c) $64x^6 - 27 = 0$

d) $x^3 + 8 = 0$ e) $x^4 + 8 = 0$

1.7.3 Förenkla:

a) $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$ b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ e) $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ f) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.8 Potenser med rationell exponent

I detta kapitel definieras vad som menas med en potens med rationell exponent. Definitionen bygger både på potens med heltalsexponent (kapitel 1.3) och på definitionen av n-te roten som gjordes i föregående kapitel.

1.8.1 Potenser med rationell exponent

Definition:
Om $\dfrac{m}{n}$ är ett rationellt tal och b är ett icke-negativt reellt tal så ges $b^{\frac{m}{n}}$ av:
$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$.

Speciellt är $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$. Exempelvis gäller för den vanliga *kvadratroten*, att $\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{1/2}$.

Vi har också att $b^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{b^m} = b^m$ (om inte detta gällt hade definitionen varit misslyckad).

Om n är ett udda heltal så är $\sqrt[n]{b}$ definierat även för $b < 0$. Man använder därför ofta skrivsättet $b^{\frac{1}{n}}$ för udda n även då $b < 0$. Här krävs stor försiktighet. Man måste vara medveten om att definitionen $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ endast gäller för $b \geq 0$.

Vi har att $\left({}^{-}27\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{{}^{-}27} = {}^{-}3$.

Men vi har också att $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$. Om man då tillämpar definitionen av $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ med $b = {}^{-}27$ får man *ett felaktigt resultat* $\left({}^{-}27\right)^{\frac{1}{3}} = \left({}^{-}27\right)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\left({}^{-}27\right)^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

1.8.2 Räkneregler

Med hjälp av räknereglerna för n:te roten ur ett positivt tal och räknereglerna för potenser med heltalsexponent kan man visa att *potensuttrycket* $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent

$x = \dfrac{m}{n}$ för $b > 0$ satisfierar samma *potenslagar* som potens med heltalsexponent (se avsnitt 1.3.3).

Potensregler

För alla positiva reella tal a och b och alla rationella tal x och y gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$, om $b > 0$.
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Exempel.

(a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

(b) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{1/3})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

(c) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

$\square$

1.8.3 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1c

1.8.1 Förenkla

a) $27^{1/3}$ b) $4^{-0,5}$ c) $(\sqrt{8})^{2/3}$

d) $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$ e) $3^{1/2}/9^{-3/4}$ f) $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$

g) $(0,0016)^{-0,25}$

1.8.2 Förenkla *a)* $\sqrt[6]{9}$ *b)* $\sqrt[6]{8}$ *c)* $\sqrt[3]{-24}$ *d)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ *e)* $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$ *g)* $4/\sqrt[3]{16}$ *h)* $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.8.3 Förenkla: *a)* $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$

b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ *c)* $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$ *d)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ *e)* $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ *f)* $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.9 Algebraiska omskrivningar

Oerhört många resonemang, i såväl matematik som andra sammanhang där matematiken tillämpas, bygger på omskrivningar av matematiska uttryck. Ofta handlar det om att förenkla uttrycket, men minst lika ofta gäller det att skriva uttrycket på den mest lämpade formen. Vilken denna form är beror naturligtvis på situationen.

Vid algebraiska omformningar får man utnyttja alla de räkneregler som gäller vid räkning med reella tal. Man bör därför vara synnerligen väl förtrogen med dessa. Speciellt de som behandlats i samband med heltal 1.1.3, rationella tal 1.2.3 och potenser 1.8.2.

Det finns ett mycket vanligt sätt att skriva produkter då variabler är inblandade. $6 \cdot a$ skrivs ofta $6a$, $a \cdot b \cdot c$ skrivs abc osv. Då man utelämnar multiplikationssymbolen måste man vara säker på att detta inte orsakar missuppfattning, abc kan mycket väl vara *en* variabel istället för produkt av tre. Hur skall $2m + 10cm$ tolkas? Betyder det $210cm$ eller $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m = 2 \cdot (1 + 10 \cdot c) \cdot m$? Det beror helt på sammanhanget. I detta kapitel skall abc tolkas $a \cdot b \cdot c$ och $2m + 10cm$ betyder $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$.

Exempel. Med de vanliga räknereglerna kan man förenkla en del algebraiska uttryck.

a) $10m-9y+5y+7m+4y-m = (10+7-1)m+(^-9+5+4)y = 16m+0 \cdot y = 16m$

b) $m-[a-b-(c-m)] = m-[a-b-c+m] = m-a+b+c-m = b+c-a$

c) $3abc \cdot a^3bc^2 \cdot {}^-(4b^2) = 3 \cdot (^-4) \cdot a \cdot a^3 \cdot b \cdot b \cdot b^2 \cdot c \cdot c^2 = {}^-12a^4b^4c^3$

d) $(3x^2y^3z)^4 = 3^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 \cdot z^4 = 81x^8y^{12}z^4$

e) $(2x+3)(4x^2-6x+9) = 2x \cdot (4x^2-6x+9) + 3 \cdot (4x^2-6x+9) =$
$2x \cdot 4x^2 - 2x \cdot 6x + 2x \cdot 9 + 3 \cdot 4x^2 - 3 \cdot 6x + 3 \cdot 9 =$
$8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27 = 8x^3 + 27$

□

1.9.1 Några viktiga algebraiska identiteter

Utöver räknereglerna finns det en hel del samband som man behöver kunna använda. De flesta är sådana att man behöver kunna dem *aktivt*. Det räcker inte att veta att de finns och kunna slå upp dem i en formelsamling. För att kunna räkna ”med flyt” krävs en hel del utantillkunskap.

Följande viktiga identiteter behöver man kunna utantill:

kvadreringsreglerna:	$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$
kuberingsreglerna:	$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$
konjugatregeln:	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$
faktoruppdelningarna:	$\begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$

Exempel.

a) $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529.$

b) $29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 841.$

c) $37^2 - 33^2 = (37-33) \cdot (37+33) = 4 \cdot 70 = 280$

$\square$

OBS: $a^2 + b^2$ (liksom $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$) kan ej faktoruppdelas (med reella tal).

En generalisering av formeln för $a^3 - b^3$ är *allmänna konjugatregeln*.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

som visas genom ihopmultiplicering av parenteserna i högra ledet.

Exempel.

a) $(3a+4b)^2 =$ (kvadreringsregeln) $= (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$

b) $(3+x^2)(x^2-3) = (x^2+3)(x^2-3) =$ (konjugatregeln) $= (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$

c) $(x-2y)^3 =$ (kuberingsregeln) $= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 =$
$x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

d) Faktoruppdelning: $4x^2 - 9a^4 = (2x)^2 - (3a^2)^2 =$ (konjugatregeln) $=$
$= (2x + 3a^2)(2x - 3a^2)$

e) Faktoruppdelning: $12x^4 - 2x^5 - 18x^3 =$ (alla gemensamma faktorer brytes ut) $=$

$= 2x^3 \cdot (6x - x^2 - 9) = -2x^3(x^2 - 6x + 9) =$ (kvadreringsregeln) $= -2x^3 \cdot (x-3)^2$

f) Faktoruppdelning: $x^4 + 8xy^6 = x \cdot (x^3 + 8y^6) = x \cdot [x^3 + (2y^2)^3] =$
$=$ (enligt formeln för $a^3 + b^3$) $= x \cdot (x + 2y^2)[x^2 - x \cdot 2y^2 + (2y^2)^2] =$
$= x \cdot (x + 2y^2)(x^2 - 2xy^2 + 4y^4)$ □

1.9.2 Pascals triangel och $(a + b)^n$

Koefficienterna i utvecklingen av $(a + b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$$
\begin{array}{r ccccccccccc}
n = 0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \quad \text{o.s.v.}
\end{array}
$$

Den sista raden innebär att $(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$

Ett tal i triangeln erhålles genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför. För att inse att detta ger koefficienterna i utvecklingen kan vi se på $(a + b)^4$. Vi har ju att $(a + b)^4 = (a + b) \cdot (a + b)^3$. Men $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Alltså är $(a + b)^4 = a \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$. Man får en term a^3b ur båda produkterna, dels $b \cdot a^3$, dels $a \cdot 3a^2b$. Koefficienten för a^3b är summan av koefficienterna för a^3 och a^2b.

På samma sätt fungerar det för alla övriga termer också.

Exempel.

a) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

b) $(a - b)^4 = (a + {}^-b)^4 = a^4 + 4a^3({}^-b) + 6a^2({}^-b)^2 + 4a({}^-b)^3 + ({}^-b)^4 =$
$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

c) $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

□

1.9.3 Rationella uttryck

Räkning med rationella uttryck följer samma räkneregler som räkning med rationella tal. Vid addition är det lämpligt att förlänga med ”så lite som möjligt”. Man bestämmer i så fall minsta gemensamma nämnare i stället för att ”multiplicera korsvis”. För att bestämma minsta gemensamma nämnare behöver man faktoruppdela de olika termernas nämnare. I detta kapitel med hjälp av kvadrerings- kuberings- eller konjugatreglerna, senare även med hjälp av faktorsatsen och polynomdivision.

Exempel.

a) $\dfrac{b-a}{c} = \dfrac{{}^{-}(a-b)}{c} = {}^{-}\left(\dfrac{a-b}{c}\right)$, varav följer att

$$\frac{b-a}{a^2-b^2} = {}^{-}\left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = {}^{-}\left(\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}\right) = {}^{-}\left(\frac{1}{a+b}\right)$$

b) $\dfrac{30x^4y^7}{12xy^{10}} = \dfrac{2\cdot 3\cdot 5\cdot x^{4-1}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot y^{10-7}} = \dfrac{5x^3}{2y^3} = 2.5\cdot x^3\cdot y^{-3}$

c) $\dfrac{x-y}{xy-x^2} = \dfrac{x-y}{x(y-x)} = {}^{-}\left(\dfrac{y-x}{x(y-x)}\right) = {}^{-}\dfrac{1}{x}$

d) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right) \div \left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a^2}\right) = \dfrac{(a^2+b^2+2ab)}{ab} \div \dfrac{(a^2-b^2)}{a^2b} =$

$$\frac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)} = \frac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)a}{a-b}$$

e) $\dfrac{5}{2x-2} - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{3x+1}{1-x^2} =$ (faktoruppdela nämnarna) $=$

$$\frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{3x} - \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)} =$$

{ minsta gemensamma nämnare är $2\cdot 3\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$}

$$= \frac{5\cdot 3x(x+1)}{2(x-1)\cdot 3x(x+1)} - \frac{1\cdot 2(x+1)(x-1)}{3x\cdot 2(x+1)(x-1)} - \frac{(3x+1)\cdot 2\cdot 3x}{(x+1)(x-1)\cdot 2\cdot 3x} =$$

$$\frac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot 3\cdot x(x+1)(x-1)} = \frac{{}^{-}5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)} =$$

$${}^{-}\left(\frac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}\right)$$

□

1.9.4 Rotuttryck

Vid omskrivning av rotuttryck kan man givetvis använda alla de räkneregler som gäller för reella tal. Det man speciellt skall tänka på är $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exempel.

a) $\dfrac{3-c}{\sqrt{c-3}} = {}^-\dfrac{c-3}{\sqrt{c-3}} = {}^-\dfrac{\left(\sqrt{c-3}\,\right)^2}{c-3} = {}^-\sqrt{c-3}$ om $c > 3$.

OBS: $\sqrt{c-3}$ är definierat om $c - 3 \geq 0$, d.v.s. om $c \geq 3$, men $1/\sqrt{c-3}$ är definierat endast om $c > 3$.

b) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+a^3}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2(1+a)}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1+a}} =$

$$\frac{a}{|a|\,\sqrt{1+a}} = \begin{cases} 1/\sqrt{1+a} & \text{om} \quad a > 0 \\ -1/\sqrt{1+a} & \text{om} \quad -1 < a < 0. \end{cases}$$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck! □

1.9.5 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1d

1.9.1 Förenkla

a) $10t - 14u + 7v - t - 8v + 14u - 8v - u$

b) $70a + 20c + 33x + c - x - 28a - 40a - 9c + 41x$

1.9.2 Förenkla

a) $m + 2p - (m + p - r)$ b) $3c - (2a + c - 5b) - (2b - 2a)$

c) $7a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)]$

1.9.3 Förenkla

a) $2xz^7 \cdot 10xz$ b) $a^2b^4c \cdot ({}^-3ac^2) \cdot 9abc$

c) ${}^-2p^2qr \cdot pq^7s^2 \cdot ({}^-7qr^3)$

1.9.4 Förenkla

a) $(3x^2y)^3$ b) $(4ab^2c^3)^2(^-2a^2b)^3$ c) $(a^2)^p \cdot (a^p b^{3p})^2 \cdot b^p$

1.9.5 Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

a) $(2x-y)(x+2y)$ b) $(2x-y)(x+2y)(x-y)$

c) $(a+x)(a^4-a^3x+a^2x^2-ax^3+x^4)$

d) $(x^2-2x+3)(2-3x-2x^2)$

1.9.6 Utveckla

a) $(3a-4b)^2$ b) $(a^3+2b^2)^2$

c) $(m^4+4)^2+(m^4-4)^2$

1.9.7 Förenkla

a) $(6-x)(x+6)$ b) $(a^2+y)(a^2-y)$

c) $(x^3+3)(x^3-3)(x^6+9)$

1.9.8 Utveckla

a) $(y+3x)^3$ b) $(3x+2y^2)^3$ c) $(x^4-6x)^3$

1.9.9 Uppdela i faktorer

a) x^2-a^4 b) $9x^4-25x^2$

c) $18x+81+x^2$ d) $x^4y+4x^2y^3-4x^3y^2$

e) x^4-x f) $3a^3+81b^3$

g) x^2-x^6 h) $54x^2y^7-16x^5y$

1.9.10 Utveckla

a) $(x-1)^5$ b) $(1-y)^7$ c) $(2x+a^2)^5$ d) $(xy^2-3z)^6$

1.9.11 Förenkla

a) $\dfrac{6a^7b^3c}{16ab^3c^3}$ b) $\dfrac{32x^ny^p}{36x^{n+1}y^{p-1}}$

c) $\dfrac{2ay+y^2}{2ay}$ d) $\dfrac{12x^2y^2+20xy^2-8x^2y}{4xy}$

1.9.12 Förenkla

a) $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ b) $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$

c) $(x-y)^3/(y-x)^5$ d) $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$

e) $(a^3-b^3)/(b-a)^2$ f) $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$

g) $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

1.9.13 Förkorta (om möjligt)

a) $(a^3+b^3)/(a+b)$ b) $(a^4-b^4)/(a-b)$

c) $(a^4+b^4)/(a+b)$ d) $(a^5-b^5)/(b-a)$

1.9.14 Förenkla

a) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y^2}{x}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}\right)$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x+y}{x-y}-2+\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

d) $\left(\dfrac{1/a}{b}-\dfrac{1/b}{a}+\dfrac{1}{2b/a}+\dfrac{2}{a/b}\right)\div\left(\dfrac{a^2+4b^2}{ab}\right)$

1.9.15 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

a) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}$ b) $1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2-4x}$

c) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{1-x^2}$ d) $\dfrac{1}{x^3-8}+\dfrac{1}{2x^2-8}+\dfrac{1}{8-4x}$

1.9.16 Förenkla och avgör för vilka värden på c som likheten gäller.

a) $\sqrt{c^2+4c+4}$ b) $c/\sqrt{c^2}$ c) $(\sqrt{c})^2/c$

d) $(c^2-9c)/\sqrt{9-c}$ e) $c/\sqrt{c^3-2c^2}$ f) $\sqrt{c^3+2c^2}/c$

2 Ekvationer

I det här avsnittet ska vi bara diskutera vad en ekvation är och hur den kan dyka upp vid problemlösning. Vi ska inte alls oroa oss för hur man löser dem. Det kommer i de följande avsnitten.

En ekvation är helt enkelt en likhet som innehåller en eller eventuellt flera obekanta variabler. Vi tar några enkla exempel.

Exempel. Likheten $21 - x = x - 3$ är en ekvation med en obekant x. Om det är en enda obekant i ekvationen så brukar man ofta av tradition använda bokstaven x, men det går lika bra med vilken bokstav (symbol) som helst. Likheten $g^2 - g = 1$ är en ekvation med en obekant som heter g.

Det är vanligt också med ekvationer med flera obekanta. Likheten $3x + 2y = 31$ är en ekvation som innehåller två obekanta x och y. □

Vad ska man då ha ekvationer till? En ekvation använder man till att beskriva ett samband som innehåller någonting som är obekant och som man önskar räkna ut vad det är. Vi tar en titt på några exempel på problem som man kan ha nytta av en ekvation för att lösa.

Exempel. Kal har en storasyster som heter Ada. Skillnaden på dem i ålder är lika många år som Kal fyllde för 3 år sedan. Ada är 21 år gammal. Hur gammal är Kal?

Lösning. Vi betecknar Kals nuvarande ålder med x. Skillnaden mellan deras ålder är då $21 - x$ och för 3 år sedan fyllde Kal $x - 3$. En ekvation som beskriver sambandet är alltså $21 - x = x - 3$. □

Exempel. Vi söker nu ett tal med den magiska egenskapen att om man ifrån kvadraten av talet subtraherar talet själv så får man exakt 1. Vilket är talet?

Lösning. Vi betecknar det okända talet med g. Subtrahera talet själv ifrån kvadraten av talet är $g^2 - g$ och detta skulle bli 1. Alltså får vi ekvationen $g^2 - g = 1$. □

Exempel. Beda är i godisaffären för att köpa lördagsgodis. Hon köper 3 likadana chokladkakor och 2 likadana tablettaskar. Hon betalar 31 kronor. Hur mycket kostar chokladkakorna respektive tablettaskarna per styck?

Lösning. Vi betecknar priset på chokladkakan med x och priset på en tablettask med y. Det totala priset på Bedas lördagsgodis blir då $3x + 2y$. Hon betalade 31 kronor så vi får alltså ekvationen $3x + 2y = 31$. □

2.1 Förstagradsekvationer

Vi ska nu börja titta på hur man löser ekvationer. Det är viktigt att veta vad man får göra med en ekvation och vad man inte får göra. I det här avsnittet behöver vi bara 3 grundläggande regler. Det är tillåtet att: (1) addera eller subtrahera samma sak från båda sidor av likheten, (2) multiplicera eller dividera båda sidorna med något som inte är 0 samt (3) förenkla de två sidorna av likheten var för sig. Alla dessa tre operationer leder till en ekvivalent ekvation, dvs man ändrar inte på lösningarna till ekvationen.

Vi börjar med den allra enklaste typen av ekvationer, så kallade linjära ekvationer. Man säger att en ekvation är linjär om det är så att det enda man gjort med de obekanta är att man multiplicerat dem med ett tal och sedan adderat eller subtraherat de olika termerna med varandra och med tal.

Exempel. Ekvationen $21 - x = x - 3$ är linjär för den enda obekanta variabeln x har bara adderats och subtraherats med tal. Samma sak för $3x + 2y = 31$ där de två obekanta bara multiplicerats med tal.

Däremot är ekvationen $g^2 - g = 1$ inte linjär då den obekante här har multiplicerats med sig själv. Inte heller ekvationen $xy = 1$ är linjär då man här multiplicerat de två obekanta med varandra. □

Linjära ekvationer är det enklaste som finns att lösa. Vi börjar med att titta på linjära ekvationer med 1 obekant som vi kallar x. Strategin är enkel. Samla alla termer som innehåller x på en sida och alla tal på den andra.

Exempel. Vi löser ekvationen $21 - x = x - 3$:

$$21 - x = x - 3 \iff (21 - x) + x = (x - 3) + x \iff 21 = 2x - 3 \iff$$

$$21 + 3 = (2x - 3) + 3 \iff 24 = 2x \iff \frac{24}{2} = \frac{2x}{2} \iff 12 = x.$$

Här betyder dubbelpilen $\iff$ att ekvationerna är ekvivalenta. Vi ser alltså att ekvationen har en enda lösning, nämligen $x = 12$. (Därmed vet vi alltså att Kal ifrån exemplet i förra avsnittet är 12 år.)

Vi löser nu ekvationen $21 + x = x - 3$:

$$21 + x = x - 3 \iff (21 + x) - x = (x - 3) - x \iff 21 = -3.$$

Här försvann x och kvar fick vi bara orimligheten $21 = -3$. Inget x i världen kan få den likheten att gälla, alltså saknar ekvationen lösning.

Avslutningsvis löser vi ekvationen $12 - (x - 3) = 15 - x$:

$$12 - (x - 3) = 15 - x \iff 12 - x + 3 = 15 - x \iff 15 - x = 15 - x \iff 15 = 15.$$

Denna sista likhet gäller uppenbarligen alltid så till denna ekvation är alla tal en lösning. Den har alltså oändligt många lösningar. □

Vi såg i exemplet att en linjär ekvation med 1 obekant kunde ha 1, 0 eller oändligt många lösningar och detta är faktiskt de enda möjligheterna som finns. Vi ska nu titta på en linjär ekvation med mer är en obekant. Här blir strategin att välja ut en av variablerna att lösa ut (få ensam på ena sidan) på samma sätt som vi gjorde med x ovan.

Exempel. Vi löser ekvationen $3x + 2y = 31$ genom att lösa ut y:

$$3x + 2y = 31 \iff (3x + 2y) - 3x = 31 - 3x \iff 2y = 31 - 3x \iff y = \frac{31 - 3x}{2}.$$

Här ser vi att för varje x vi väljer så får vi precis ett y nämligen $y = (31 - 3x)/2$. Vi får alltså oändligt många par av lösningar. Två möjliga lösningar är t ex $x = 5, y = 8$ eller $x = 6, y = 13/2$.

Denna ekvation var ju den vi hade i förra avsnittet då Beda köpte ett antal chokladkakor och tablettaskar. Vi ser nu när vi löser ekvationen att det inte finns unik lösning och därför räcker inte informationen till att räkna ut vad godiset kostar per styck. $\square$

Om man har en linjär ekvation med mer än 1 obekant så får man alltid oändligt många lösningar (eller ingen lösning alls om alla obekanta försvinner när man förenklar).

2.1.1 Övningar

2.1.1 Lös ekvationerna:

a) $3(2 - x) = -(1 + 2x)$ b) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 10$

c) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 7 - 7x$ d) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 6 - 7x$

2.1.2 Lös ut y i följande ekvationer:

a) $3(2 - x) = -(1 + y)$ b) $3(5 - 3y) - 2(4 - x) = 10 + 2y$

2.2 Andragradsekvationer

Också andragradsekvationer löser man genom att addera eller subtrahera samma tal till båda sidor av ekvationen, multiplicera eller dividera båda leden med tal ($\neq 0$), eller göra omskrivningar.

Den enklaste typen av andragradsekvationer, $x^2 = a$ där a är ett positivt tal, kan man lösa helt utan kalkyler. Vi har ju att $\sqrt{a}$ är det positiva tal vars kvadrat är a, $(\sqrt{a})^2 = a$ om $a > 0$. Eftersom det också gäller att $(-\sqrt{a})^2 = a$ så har ekvationen de två lösningarna $\sqrt{a}$ och $-\sqrt{a}$. Att det inte kan finnas fler lösningarna återkommer vi till i kapitel 2.5.

Ekvationen $x^2 = 9$ har alltså de två lösningarna 3 $(= \sqrt{9})$ och -3.

Exempel. Förhållandet mellan de två sidorna i en rektangel är 2:3. Om kortsidan är 10 m är alltså långsidan 15 m. Vi skall bestämma sidlängderna så arean är 54 m^2.

Lösning. Om kortsidan är $2a$ m så är långsidan $3a$ m och arean $6a^2$ m^2. Alltså skall a vara lösning till $6a^2 = 54$. Division med 6 ger $a^2 = 9$ vars lösningar är 3 och -3. Endast positiva lösningen kan vara relevant så rektangelsidorna är 6 respektive 9 m. ☐

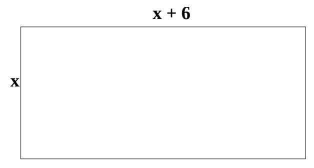
Den näst enklaste typen är $(x-b)^2 = a$ där a är ett positivt tal. Här är $x - b$ ett tal vars kvadrat är a. Då är $x - b = \sqrt{a}$ eller $x - b = -\sqrt{a}$. Lösningarna till $(x-b)^2 = a$ är således $x_1 = b + \sqrt{a}$ och $x_2 = b - \sqrt{a}$.

Exempel. Ekvationen $(x-2)^2 = 9$ har de två lösningarna som ges av $x - 2 = 3$ och $x - 2 = -3$. Således $x_1 = 5$ och $x_2 = -1$. ☐

Exempel. Långsidan i en rektangel är 6 meter längre än kortsidan. Vi skall bestämma sidlängderna så arean är 55 m^2.

Lösning.

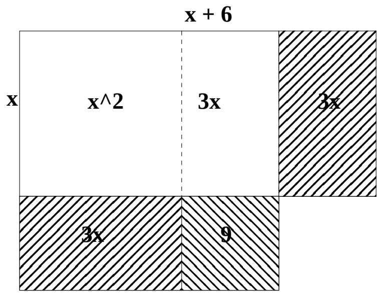
Antag att kortsidan är x m. Då är långsidan $x+6$ m och arean $x(x+6)$ m^2. Vi söker således en lösning till ekvationen $x(x+6) = 55$.



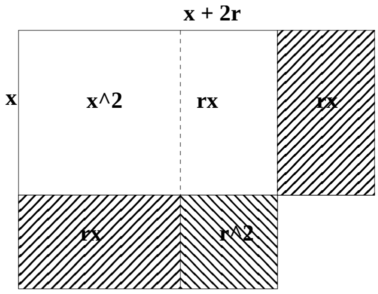
$x(x+6) = 55 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 55$. Genom att addera 9 till vänsterledet $x^2 + 6x$ blir uttrycket en jämn kvadrat: $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = (x+3)^2$.

Addera därför 9 till båda sidor av ekvationen. $x(x+6) = 55 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 55 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 55 + 9 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 64 \Leftrightarrow x + 3 = 8$ eller $x + 3 = -8 \Leftrightarrow x + 3 = 8$ eller $x = -11$. Endast positiv lösning: $x = 5$. Sidorna är 5 respektive 11 m. ☐

Metoden i exemplet kallas *kvadratkomplettering*: Genom att addera en kvadrat med arean 9 m^2 gör vi om rektangeln till en kvadrat med sidan $x + 3$. Rektangeln har arean 55 m^2, kvadraten har arean 64 m^2.



På samma sätt kan man kvadratkomplettera alla andragradsuttryck: $x^2 + 2rx$ kan ses som arean av en rektangel med sidorna x och $x + 2r$. Genom att addera en kvadrat med sidan r erhåller man en kvadrat med sidan $x + r$.



Man löser alla andragradsekvationer med hjälp av kvadratkomplettering:

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \tfrac{p}{2} \cdot x = -q \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2 \cdot \tfrac{p}{2} \cdot x + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q \Leftrightarrow \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q$$

varför $x + \dfrac{p}{2} = \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$ eller $x + \dfrac{p}{2} = -\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Resultatet ovan har du använt många gånger. Ofta skrivs det med *en* formel: $x = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$. Den är inte så svår att memorera, men minnet blir lätt lite diffust efter ett tag. Därför är det betydligt bättre om du även kan kvadratkomplettera och på det viset komma fram till lösningen utan att använda formeln. Tecknet $\pm$ är praktiskt vid kalkyler men man bör alltid ange de två rötterna separat.

Exempel.

a) Ekvationen $x^2 + 6x + 5 = 0$ har rötterna

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 5} = -3 \pm \sqrt{9 - 5} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2$ d.v.s.

$x_1 = -3 + 2 = -1$ och $x_2 = -3 - 2 = -5$

b) Ekvationen $6 + 3x - 4x^2 = 0$ kan skrivas $x^2 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2} = 0$.

Denna har rötterna

$$x_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9+96}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8} \cdot \sqrt{105}.$$

Således $x_1 = (3 + \sqrt{105})/8$ och $x_2 = (3 - \sqrt{105})/8$.

$\square$

Observera! Det är inte alltid nödvändigt att räkna för att bestämma en ekvations rötter. detta illustreras av följande exempel.

Exempel. Ekvationen $(x-1)(x+3) = 0$ har de två lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$.

Detta förklaras av att en produkt av två tal är 0 om minst ett av talen är 0, men inte annars. Produkten $(x-1)(x+3)$ är alltså 0 bara om $x - 1 = 0$ eller $x + 3 = 0$ vilket ger de två lösningarna.

På samma sätt ser vi att ekvationen $x^2 + px = 0$ har de två lösningarna $x_1 = 0$ och $x_2 = -p$. $\square$

Anmärkning: Om vi multiplicerar ihop de två termerna får vi att $(x-1)(x+3) = x^2+2x-3$. Ekvationen $x^2+2x-3 = 0$ har alltså de två rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$. Det vi ser här är ett generellt fenomen: ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna x_1 och x_2 om och endast om $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Detta ger både en möjlighet att kontrollera att rötterna är korrekta och en möjlighet att enkelt gissa heltalsrötter.

Observera! En ekvation $x^2 = a$, där a är ett negativt tal, saknar reella rötter. Det finns ju inte något reellt tal vars kvadrat är negativ. Däremot finns det komplexa lösningar. Ekvationen $x^2 = -4$ har lösningarna $x_1 = i$ och $x_2 = -i$ där i är den *imaginära enheten*. Genom kvadratkomplettering ser vi att ekvationen $x^2 + 2x + 2 = 0$ har rötterna $x_1 = -1 + i$ och $x_2 = -1 - i$. Vi återkommer till detta i ett senare kapitel. I detta kapitel är vi endast intresserade av reella lösningar.

2.2.1 Övningar

2.2.1 Lös ekvationerna

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $3 + 2x - x^2 = 0$ c) $2x^2 = 3 + x$

d) $3x + 7x^2 = 0$ e) $4x^2 + 9 = 12x$ f) $5x^2 + 3x = 1$

2.2.2 Kvadratkomplettera

a) $x^2 + 4x + 1$ b) $4x^2 - 36x + 100$ c) $3 - 12x - x^2$

2.2.3 Faktoruppdela (med reella tal)

a) $x^2 + x - 6$ b) $8 - 6x - 2x^2$

c) $x^2 - x - 1$ d) $x^2 + x + 1$

2.2.4 Angiv en andragradsekvation med rötterna

a) 2 och -5 b) $-\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$ c) $1 + \sqrt{5}$ och $1 - \sqrt{5}$

2.3 Ekvationer som leder till andragradsekvationer

En del ekvationer kan överföras till en andragradsekvation genom en algebraisk omskrivning.

Observera! Om en ekvation multipliceras med en faktor, som innehåller den obekanta variabeln, kan man få extra rötter. Ekvationen $(x - 1)(x - 2) = 0$ har rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$. Om vi multiplicerar med $x-3$ får vi ekvationen $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ som har ytterligare en rot $x_3 = 3$.

På samma sätt leder oftast division till att rötter tappas bort. Ekvationen $x^2 + 4x = 0$ har rötterna $x_1 = 0$ och $x_2 = -4$. Division med x leder till ekvationen $x + 4 = 0$, roten $x_1 = 0$ tappas bort.

Det är därför extra viktigt att pröva de erhållna rötterna i den givna ekvationen och, naturligtvis, tänka sig noga för då man dividerar med en faktor som innehåller den obekanta.

Exempel. Vi löser ekvationen $x - \dfrac{8}{x+2} = 0$.

Lösning. Ekvationen multipliceras med $x + 2$.

Rötterna till den nya ekvationen $x(x + 2) - 8 = 0$ bestäms med kvadratkomplettering: $x(x+2)-8 = 0 \Leftrightarrow x^2+2x = 8 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1,2} = -1\pm 3$.

Rötterna är $x_1 = 2$ och $x_2 = -4$. Vi prövar dessa i ursprungsekvationen och finner att båda är korrekta. (Eftersom vi multiplicerade med $x + 2$ är enda möjliga falska roten -2. Kontrollen var logiskt sett överflödig men man bör *alltid* kontrollera genom insättning.) $\square$

Vissa ekvationer, som innehåller rottecken kan överföras till en andragradsekvation genom att de båda leden kvadreras. Detta bygger på att om a och b är positiva tal och

$b = \sqrt{a}$ så är $b^2 = a$. Notera att om b är ett negativt tal och $b = -\sqrt{a}$ så är också $b^2 = a$. Den kvadrerade ekvationen *kan* ha fler rötter än den givna.

Exempel. Vi löser ekvationen $\sqrt{2x + 143} = x$.

Lösning. Ekvationen kvadreras. Den nya ekvationen $2x + 143 = x^2$ skrivs om till $x^2 - 2x + 143 = 0$.

Denna har rötterna $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{144} = 1 \pm 12$.

Roten $x_1 = 13$ är rot till givna ekvationen eftesom $\sqrt{2 \cdot 12 + 143} = \sqrt{169} = 13$.

Däremot är $x_2 = -11$ en s.k. *falsk rot*: $\sqrt{2 \cdot (-11) + 143} = \sqrt{121} = 11 \neq -11$.

Denna falska rot erhålls på grund av kvadreringen och är rot till ekvationen
$\sqrt{2x + 143} = -x$. □

Exempel. Vi löser ekvationen $1 + \sqrt{x^2 + 5} = 2x$.

Lösning. Ekvationen kan skrivas $\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$.

Kvadrering ger $x^2 + 5 = (2x - 1)^2$ som utvecklas till $x^2 + 5 = 4x^2 - 4x + 1$, d.v.s. $3x^2 - 4x - 4 = 0$, som löses.

Man får $x_1 = 2$ och $x_2 = -2/3$. Nu måste prövning ske genom insättning i den givna ekvationen, eller *hellre* genom prövning i ekvationen $\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$, varvid *endast tecknet behöver prövas*, eftersom $q^2 = p \Leftrightarrow q = \sqrt{p}$ eller $q = -\sqrt{p}$:

$x_1 = 2$ ger *höger led*: $HL = 2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$, så $x_1 = 2$ *är* en rot till den givna ekvationen. För säkerhets skull kontrollerar vi även vänster led (vi kan ju ha räknat fel): $VL = \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$ vilket bekräftar att $x_1 = 2$ är en rot till den givna ekvationen.

$x_2 = -2/3$ ger $HL = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 < 0$. Alltså är $x_2 = -2/3$ en falsk rot.

Svar: Ekvationen har roten $x_1 = 2$. □

Flera olika typer av ekvationer, t.ex. fjärdegradsekvationer som saknar $x-$ och x^3-termer, vissa ekvationer som innehåller rotuttryck och en del andra, kan överföras till andragradsekvationer med lämpliga *substitutioner*.

> En fjärdegradsekvation, som saknar x- och x^3-termer, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kan med substitutionen $x^2 = z$ överföras till en andragradsekvation för z, $az^2 + bz + c = 0$.

Om denna andragradsekvation har de positiva rötterna z_1 och z_2, så har den ursprungliga fjärdegradsekvationen de reella rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ och $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$, ty $x^2 = z$.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.

Lösning. Sätt $x^2 = z$. Då fås $z^2 - 20z + 64 = 0$ med rötter $z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100-64} = 10 \pm 6$, d.v.s. $z_1 = 16$ och $z_2 = 4$.

$x^2 = z_1 = 16$ ger $x_1 = 4$ och $x_2 = -4$, $x^2 = z_2 = 4$ ger $x_3 = 2$ och $x_4 = -2$.

Rötterna till $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ är $4, -4, 2$ och -2. $\square$

Ibland är det enklast att lösa en ekvation som innehåller rottecken med hjälp av en substitution.

Exempel. Vi löser ekvationen $x + \sqrt{x} = 6$.

Lösning. Sätt $\sqrt{x} = z$. Då fås $z^2 + z = 6$ vars rötter är $z_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$, $z_1 = 2$, $z_2 = -3$.

$\sqrt{x} = z_1 = 2 \Rightarrow x = 4$, $\sqrt{x} = z_1 = -3$ är orimligt.

Den givna ekvationen har en enda rot, $x = 4$. $\square$

2.3.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2a

2.3.1 Lös ekvationerna

a) $x + 3 = 4 \cdot x^{-1}$ b) $x + 9x^{-1} = 12$ c) $3 + x^{-2} = x^{-1}$

2.3.2 Lös ekvationerna genom kvadrering

a) $x - 6 = \sqrt{x}$ b) $x + 1 = \sqrt{x^2+5}$ c) $x - 2 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d) $3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x$

e) $x + 2\sqrt{x} = 8$

f) $\sqrt{x + 132} = x$

g) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} - x = 3$

h) $2x + \sqrt{x^2 + x} = 1$

i) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5}$

2.3.3 Lös ekvationen

a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

b) $1225 - 74x^2 + x^4 = 0$

c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

d) $24x^2 = 72 + 2x^4$

e) $6x^4 = 7x^2 + 3$

2.3.4 Lös ekvationerna med substitution

a) $x - 6 = \sqrt{x}$ b) $x + 6\sqrt{x} = 1$ c) $x + 2 = 3\sqrt{x}$

2.4 Linjära ekvationssystem

Ibland har man flera ekvationer med flera obekanta, och man vill lösa ekvationssystemet, dvs hitta alla värden för de obekanta som uppfyller alla ekvationer samtidigt.

När man skall lösa ett sådant system försöker man genom *elimination* skaffa sig en ekvation, som endast innehåller en obekant. När man väl har löst denna kan man sätta in värdet i en av ursprungsekvationerna och lösa för den andra obekanta variabeln.

Exempel. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$

Metod 1: (Substitutionsmetoden): Man kan isolera x i den första ekvationen och få $x = (5 - 2y)/3$.

När man sätter in detta (substituerar) i den andra ekvationen får man

$$7(5 - 2y)/3 + 3y = 1 \Longleftrightarrow 35 - 14y + 9y = 3 \Longleftrightarrow 32 = 5y$$

och därmed $y = 32/5 = 6,4$ och $x = (5 - 2y)/3 = -13/5 = -2,6$.

Metod 2: (Additionsmetoden): Multiplicera (för att eliminera x) de givna ekvationerna med 7 resp. (-3) och addera:

$$\begin{cases} 21x + 14y = 35 \\ \underline{-21x - 9y = -3} \end{cases}$$
$$5y = 32$$

Här får man $y = 32/5 = 6,4$, som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger $x = -13/5 = -2,6$.

Svar: $x = -2,6$ och $y = 6,4$

OBS: Man bör alltid *kontrollera svaret* genom insättning i de givna ekvationerna! $\square$

Anmärkning 1. I exemplet ovan gäller att:

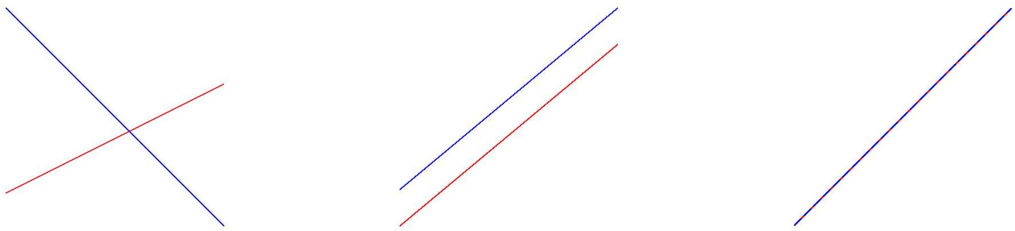
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5y = 32 \end{cases}$$

där det högra ekvationssystemet är *triangulärt*, d.v.s. koefficienterna för x och y bildar en triangel. När ett system är triangulärt, så är en av de obekanta redan eliminerad i sista ekvationen, så systemet är förberett för lösning.

Anmärkning 2. Det spelar ingen roll vilken av variablerna man eliminerar, så man kan börja med den som leder till de enklaste uttryck. Variablerna kan ha andra namn än x och y, vilka som helst egentligen; u och v är ganska vanliga. Man kan dessutom utvidga metoderna till system med 3 eller fler ekvationer (och 3 eller fler variabler).

Anmärkning 3. Geometriskt motsvarar den linjära ekvationen $ax + by = c$ en **rät linje**. (Här är a, b, c fasta parameter och x, y variabler). Ett system av två sådana linjära ekvationer motsvarar alltså skärningspunkterna mellan två räta linjer, och har därmed

- *en* lösning om de räta linjerna är *skärande*
- *ingen* lösning om de räta linjerna är *parallella* (och olika)
- *oändligt* många lösningar om de räta linjerna *sammanfaller*.



2.4.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2b

2.4.1 Lös ekvationssystemen:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 9x - 6y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 15s + 14t = 59 \\ 12s - 35t = 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 1/x + 1/y = 5/6 \\ 1/x - 1/y = 1/6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 6x + 5y + z = 45 \\ 5x + 2y - z = 23 \\ 13x - 7y + z = 6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x - y + z = 20,1 \\ x + y - z = 9,9 \\ 3x + 2y + 8z = 30,4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ a - b + 2c = 2 \\ 3a - 2b + c = -3 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 5x + 4y + z = 0 \end{cases}$

2.4.2 En person som tillfrågades om sin ålder svarade: ”För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag blott 4 gånger så gammal.” Hur gammal var han? (Du kan behöva räkna med halvår).

2.5 Polynom, ekvationer av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision

Vi ska nu titta lite på polynom. Polynom består av en summa av termer på formen ax^n, där *koefficienten* a är ett tal, *potensen* $n \geq 0$ ett heltal (med andra ord ett naturligt tal) samt x en variabel. Den högsta potensen n med koefficienten skild ifrån 0 i ett polynom kallas för *graden av polynomet*. (Istället för x kan man förstås använda en annan variabel om man så vill.)

Exempel. När vi löste andragradsekvationer så hade vi uttryck på formen x^2+3x+1. Detta är ett polynom av grad 2. Uttrycket x^4+3x^3+x är ett polynom av grad 4.

Däremot är **inte** uttrycken $x^2+x^{-1}+1$ eller $x^2+\sqrt{x}+1$ några polynom då potensen i den andra termen inte är ett naturligt tal. $\square$

Vi låter $p(x)$ beteckna ett polynom. *Värdet i en punkt* a för polynomet är $p(a)$, dvs vi ersätter helt enkelt x med a. Ett *nollställe* till polynomet är ett tal b sådant $p(b)=0$.

Exempel. Låt $p(x)=x^2+3x+2$. Värdet i 2 är då $p(2)=2^2+3\cdot 2+2=12$ och värdet i -1 är $p(-1)=(-1)^2+3\cdot(-1)+2=0$. Alltså är -1 ett nollställe till polynomet. $\square$

Det finns ett viktigt samband mellan nollställen till ett polynom och faktorer till polynomet. Följande sats är mycket viktig att behärska för att kunna arbeta med polynom:

Faktorsatsen: Antag att $p(x)$ är ett polynom och a ett tal. Då är a ett nollställe till $p(x)$, dvs $p(a)=0$, om och endast om $x-a$ är en faktor i $p(x)$, dvs

$$p(x)=(x-a)\cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom med grad ett mindre än $p(x)$.

Exempel. Vi såg i exemplet ovan att -1 är ett nollställe till polynomet $p(x)=x^2+3x+2$. Enligt faktorsatsen vet vi därmed att

$$x^2+3x+2=(x-(-1))\cdot q(x)=(x+1)\cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom av grad 2-1=1. Alltså är $q(x)=kx+m$ för några tal k och m. Vi kan räkna ut vad $q(x)$ är genom att utnyttja likheten

$$x^2+3x+2=(x+1)\cdot q(x)=(x+1)(kx+m)=kx^2+kx+mx+m=kx^2+(k+m)x+m.$$

Genom att identifiera koefficienterna för x^2 får vi $k=1$ och om vi identifierar konstanterna så får vi $m=2$. En extra kontroll får man genom att man ser att koefficienterna för x är 3 respektive $k+m=1+2=3$. Alltså är

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2),$$

och alltså är också -2 ett nollställe till polynomet. (Eventuellt kanske du kunde listat ut att det skulle vara just $x+2$ direkt i huvudet?) $\square$

Metoden som användes i exemplet att hitta den andra faktorn när man känner en faktor i ett polynom kallas för kort division. Man kan alternativt använda sig av lång division med liggande stolen ungefär som för tal. Vi illustrerar de två metoderna i ytterligare ett exempel.

Exempel. Vi tittar på tredjegradspolynomet $x^3 - 9x + 10$. Genom att testa så ser vi att 2 är ett nollställe till polynomet, ty $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 0$. Därmed vet vi enligt faktorsatsen att $x - 2$ är en faktor och att $x^3 - 9x + 10 = (x - 2)q(x)$, där $q(x)$ är ett andragradspolynom.

Vi bestämmer först $q(x)$ med kort division. Vi har

$$x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c.$$

Koefficienten framför x^3 ger $a = 1$ och konstanten ger $10 = -2c$ så $c = -5$. Koefficienten framför x^2 ger nu $0 = -2a + b = -2 + b$ så $b = 2$. Kontroll med koefficienten framför x ger $-9 = -2b + c = -2 \cdot 2 - 5$ vilket stämmer alldeles utmärkt.

Vi utför nu lång division med liggande stolen. Här bestämmer man successivt koefficienten för den högsta kvarvarande potensen.

$$
\begin{array}{l|l}
\hline
x^3-9x+10 & x-2 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{x^2} \\
\hline
x^3-9x+10 & x-2 \\
\hline
-x^2(x-2) & \\
\hline
2x^2-9x+10 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{x^2+2x} \\
\hline
x^3-9x+10 & x-2 \\
\hline
-x^2(x-2) & \\
\hline
2x^2-9x+10 & \\
-2x(x-2) & \\
\hline
-5x+10 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{x^2+2x-5} \\
\hline
x^3-9x+10 & x-2 \\
\hline
-x^2(x-2) & \\
\hline
2x^2-9x+10 & \\
-2x(x-2) & \\
\hline
-5x+10 & \\
-(-5)(x-2) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

I första steget frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i täljaren dvs x^3. Jo den går x^2 gånger. Vi skriver detta överst och subtraherar sedan $x^2(x-2)$ ifrån täljaren och får $2x^2 - 9x + 10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren dvs $2x^2$. Jo den går $2x$ gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $2x(x - 2)$ ifrån återstoden av täljaren och får $-5x + 10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren dvs $-5x$. Jo den går -5 gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $-5(x - 2)$ ifrån återstoden av täljaren och får 0. Därmed ser vi att resten blir 0 (det visste vi ju redan) och kvoten blir $x^2 + 2x - 5$. $\square$

Faktorsatsen kan man använda för att förkorta uttryck som består av en kvot av två polynom. För att förkorta ett sådant uttryck måste man hitta en gemensam faktor mellan de två polynomen. Vi tittar på ett exempel.

Exempel. Förkorta

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 5x^2 - 6x}$$

så långt det går. Först observerar vi att man kan bryta ut faktorn x ur både täljare och nämnare som vi förkortar bort. Kvar blir då

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$$

Täljaren kan vi faktorisera med hjälp av konjugatregeln till $(x-1)(x+1)$. För att kolla om någon av dessa två är faktorer i nämnaren så kollar vi om 1 eller -1 är ett nollställe till $x^2 + 5x - 6$. Vi finner att 1 är ett nollställe och faktoriserar (med kort division som ovan) $x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$. Därmed kan vi förkorta bort $x - 1$ och får till slut

$$\frac{x+1}{x+6},$$

vilket inte kan förkortas mer.

Observera att det urspungliga och det förkortade uttrycket är lika för alla x utom $x = 0$ och $x = 1$. För dessa två värden så ju inte det ursprungliga uttrycket definierat, $\square$

Vi såg i ett exempel ovan att om man visste ett nollställe till ett andragradspolynom så kunde man med hjälp av faktorisering få det andra nollstället. För andragradspolynom har vi ju redan en allmän metod för att hitta nollställen, men för polynom av högre grad kan man ha stor nytta av denna observation. Antag att vi har ett tredjegradspolynom $p(x)$ som vi vill hitta alla nollställen till och att vi känner till att a är ett nollställe. Då är $p(x) = (x-a) \cdot q(x)$ där $q(x)$ är ett andragradspolynom. Ett nollställe till $p(x)$ är nu ett nollställe till antingen $x - a$ eller till $q(x)$. Alltså för att hitta övriga nollställen till $p(x)$ så hittar vi nollställena till andragradspolynomet $q(x)$ vilket vi vet hur man gör.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^3 - 9x + 10 = 0$. Vi såg i ett tidigare exempel att $x^3 - 9x + 10 = (x-2)(x^2 + 2x - 5)$, så att $x_1 = 2$ är en lösning och eventuellt andra lösningar är nollställen till $x^2 + 2x - 5$. Dessa hittar vi med formeln för lösningar till andragradsekvationer:

$$x_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-5)} = -1 \pm \sqrt{6}$$

Rötterna är alltså $x_1 = 2,\ x_2 = -1 + \sqrt{6}$ och $x_3 = -1 - \sqrt{6}$. $\square$

Följande resultat kan man ha nytta av om man ska försöka hitta ett nollställe till ett polynom av grad 3 eller högre med heltalskoefficienter:

Antag att vi har ett polynom $x^3 + cx^2 + bx + a$ där alla koefficienter är heltal. Om x_1 är ett heltal som är ett nollställe till polynomet så gäller att konstanttermen a är en multipel av x_1. Med andra ord så är varje heltalsnollställe en delare till konstanttermen a. Samma sak gäller för polynom $x^n + \ldots + bx + a$ av vilken grad n som helst.

Exempel. Vi tittar på polynomet $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Det har endast heltalskoefficienter så om det har något heltal som nollställe så måste det vara en delare till 6. Möjliga nollställen blir alltså $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Om man testar dessa tal så finner man att 4 av dem är nollställen nämligen $\{1, -1, 2, -3\}$. Vi kan alltså faktorisera polynomet som

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3). \qquad \square$$

Om ett polynom $p(x)$ har samma faktor $(x - a)$ två gånger så säger man att a är en *dubbelrot* till ekvationen $p(x) = 0$ (om den förekommer tre gånger så kallas den trippelrot osv).

Exempel. Lös ekvationen $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$.

Lösning: Först löses ekvationen $x^2 - 2x - 7 = 0$, som har rötterna $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Polynomet kan faktoriseras som

$$(x^2 - 2x - 7)^2 = (x - (1 + 2\sqrt{2}))^2 (x - (1 - 2\sqrt{2}))^2,$$

så $1 + 2\sqrt{2}$ och $1 + 2\sqrt{2}$ är dubbelrötter. $\square$

2.5.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2c

2.5.1 Förenkla följande kvoter mellan polynom så långt det går.

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4}$

a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^4 - 7x^2 + 6x}$

2.5.2 Lös följande ekvationer. Tips: De har minst en rot som är ett heltal.

a) $x^3 + 3x^2 + x = 0$

b)$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $2x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = 0$

d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3 = 0$

2.5.3 Lös följande ekvationer. Ange om någon av rötterna är dubbelrot eller trippelrot.

a) $(x - 1)^3 = 0$

b) $x^3 - 1 = 0$

c) $(x^2 - 1)^3 = 0$

2.5.4 Faktoruppdela följande polynom.

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $x^3 + 7x^2 + 11x + 2$

c) $6 + 3x^2 - 5x - x^3$

3 Geometri

Detta kapitel handlar om analytisk geometri, speciellt räta linjens och cirkelns ekvationer, samt trigonometri.

Grunden till den analytiska geometri som behandlas här är euklidisk geometri, vi inleder därför med att precisera begrepp och formulera några viktiga satser inom den euklidiska geometrin.

3.1 Euklidisk geometri

Som tidigare påpekats, är det inte helt oproblematiskt att definiera begrepp som punkter, räta linjer och plan. Vi måste nöja oss med en intuitiv uppfattning och utgå från att alla har en gemensam inre bild av ett plan som har sin utbredning i två dimensioner och saknar begränsningar, räta linjer i detta plan vilka har sin utbredning i en dimension och är obegränsade samt punkter som fyller planet men inte har någon utbredning alls.

Grundantaganden i den euklidiska geometrin är att om man har två olika punkter P och Q i planet, så finns det exakt en rät linje som går genom dessa punkter. Har man en tredje punkt R, som inte ligger på linjen, så finns det exakt en rät linje genom R parallell med linjen genom P och Q. Detta senare kallas det *euklidiska parallellaxiomet* och är den avgörande skillnaden mellan euklidisk geometri och *icke-euklidisk*.

Det är praktiskt att ha vissa konventioner/överenskommelser om hur olika begrepp betecknas.

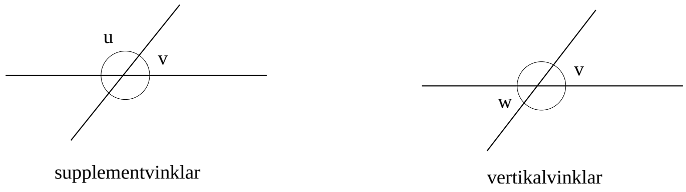
I detta kapitel betecknas punkter med stora bokstäver A, B, C osv. Med *linjen* AB menas linjen genom punkterna A och B. Med *strålen* AB menas den del av linjen AB som börjar i A, genomlöper B och fortsätter obegränsat åt det hållet. Med *sträckan* AB menas den del av linjen som ligger mellan A och B. Om inget annat sägs så avses med AB sträckan AB. Längden av sträckan AB betecknas $|AB|$. Om vi behöver enklare beteckningar för längder så betecknas dessa med små bokstäver, a, b, c osv.

Två strålar eller sträckor AB och AC bildar en vinkel med spets vid A. Denna betecknas $\angle A$ eller $\angle BAC$. Strålarna kallas *vinkelns ben*. Egentligen ger de två strålarna upphov till två vinklar, oftast en som är mindre än ett halvt varv och en som är större. Om inget särskilt påpekas så avses den mindre av de två.

Storleken, mätetalet, för $\angle A$ betecknas oftast också med A eller, om detta är opraktiskt, med små bokstäver, v, v_1, u osv. Vi återkommer i avsnitt 3.5 till vinkelmätning.

Med $\triangle ABC$ menas triangeln med hörn A, B och C.

Då två linjer skär varandra i en punkt A bildas fyra vinklar. Två som har ett vinkelben gemensamt, dessa kallas *supplementvinklar* eller *sidovinklar* , och två som inte har ett gemensamt ben, dessa kallas *vertikalvinklar*. Vi får de två supplementvinklarna också om vi låter en stråle AC utgå från en punkt A på en linje AB. Om en vinkel är lika stor som sin supplementvinkel så säger vi att vinkeln är *rät*. En rät vinkel är en fjärdedels varv. Beroende på hur man anger vinklars storlek är den räta vinkeln $\frac{\pi}{2}$ radianer eller 90 grader.



Två vinklar, $\angle BAC$ och $\angle B'A'C'$, är lika stora om man kan flytta, vrida och eventuellt spegla (vända) $\angle B'A'C'$ så att A' faller på A, vinkelbenet $A'B'$ faller på vinkelbenet AB och vinkelbenet $A'C'$ faller på vinkelbenet AC.

Med denna definition följer direkt att summan av de två supplementvinklarna alltid är två räta vinklar och att vertikalvinklar alltid är lika stora.

En av de första geometrisatser man får lära sig i skolan är följande sats.

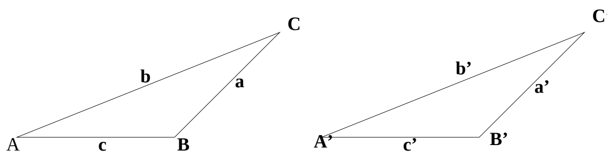
Sats: *Vinkelsumman i alla trianglar är två räta (*$180°$*).*

Ofta ges någon relativt enkel motivering, något experiment eller liknande som skall övertyga om sanningshalten i satsen. Tyvärr finns det ingen enkel och korrekt motivering och inget experiment som kan visa satsen. Den är ekvivalent med parallellaxiomet och beviset måste utgå från detta.

3.1.1 Kongruens och likformighet

För alla resonemang om geometri är kongruens- och likformighetsbegreppen viktiga.

Man säger att två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är *kongruenta* om man genom att flytta, vrida och eventuellt vända (spegla) den ena kan få hörnen A och A', B och B' samt C och C' att sammanfalla. . (Notera att ordningen är väsentlig.)



Med detta och axiomen som utgångspunkt kan man bevisa de olika så kallade kongruensfallen för trianglar.

Första kongruensfallet: sida - vinkel - sida *Om två sidor och mellanliggande vinkel i två trianglar är lika så är trianglarna kongruenta.*

I figuren ovan: Om $b = b'$, $c = c'$ och $\angle A = \angle A'$ så är trianglarna kongruenta.

Andra kongruensfallet: sida - sida - sida *Om två trianglars sidor är lika så är trianglarna kongruenta.*

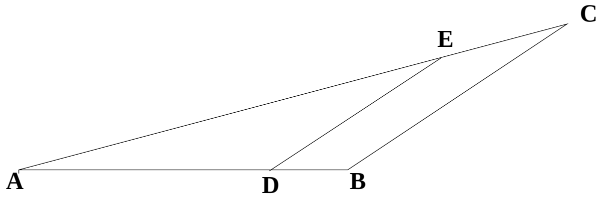
I figuren ovan: Om $a = a'$, $b = b'$ och $c = c'$ så är trianglarna kongruenta.

Tredje kongruensfallet: vinkel - sida -vinkel *Om två vinklar och mellanliggande sida är lika i två trianglar så är trianglarna kongruenta.*

I figuren ovan: Om $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ och $c = c'$ så är trianglarna kongruenta.
Anm: Eftersom vi vet att vinkelsumman i alla trianglar är två räta så måste $\angle C = \angle C'$ om de två andra vinklarna är lika. Därför går det lika bra om $a = a'$ eller $b = b'$.

Likformighet Man kallar två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ *likformiga* om $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ och $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$.

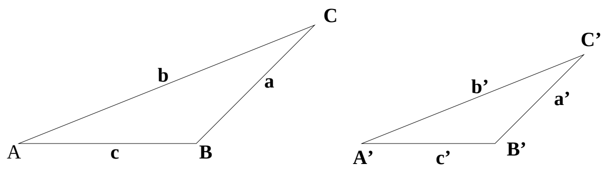
Den viktigaste satsen om likformiga trianglar är **topptriangelsatsen**.



I triangeln ovan är DE parallell med BC. Triangeln $\triangle ADE$ är en *topptriangel* i den större triangeln $\triangle ABC$.

Topptriangelsatsen säger då att de två trianglarna $\triangle ADE$ och $\triangle ABC$ är likformiga. Denna sats är det nog lätt att tro på, men den är faktiskt riktigt svår att bevisa. Man måste ha en bra definition av *linje* så att punkterna på varje linje motsvarar de reella talen. Dessutom kommer det in gränsvärdesresonemang. Tyvärr ryms detta inte i en sommarmattekurs.

De olika kongruensfallen har sina motsvarande likformighetsfall som bevisas genom att man visar att den mindre av de två trianglarna är kongruent med en topptriangel i den större.



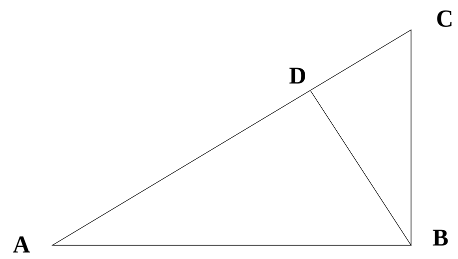
Första likformighetsfallet: (sida - vinkel - sida) Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\angle A = \angle A'$ och $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'}$ så är trianglarna likformiga.

Andra likformighetsfallet: (sida - sida - sida) Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ så är trianglarna likformiga.

Tredje likformighetsfallet: (vinkel - vinkel) Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\angle A = \angle A'$ och $\angle B = \angle B'$ så är trianglarna likformiga.

Exempel.

I vidstående figur är $\angle ABC$ och $\angle ADB$ räta vinklar. Eftersom $\angle A$ är gemensam för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ADB$ är dessa två trianglar likformiga enligt tredje likformighetsfallet. På samma sätt visas att trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle BDC$ är likformiga



□

3.1.2 Pythagoras sats

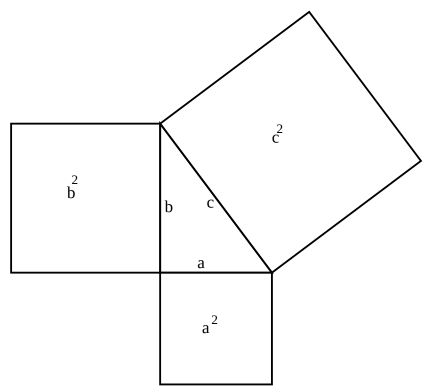
Pythagoras sats är, eller borde vara, välkänd för de flesta i vår kultur. Få resultat om något inom matematiken har en längre historia. Det är dokumenterat att satsen var känd redan av babylonierna för 3500 år sedan även om den fått sitt namn efter en grekisk matematiker Pythagoras, som verkade för ca 2500 år sedan.

En formulering av satsen är:

Summan av areorna av kvadraterna (som står) på kateterna i en rätvinklig triangel är samma som arean av kvadraten (som står) på hypotenusan.

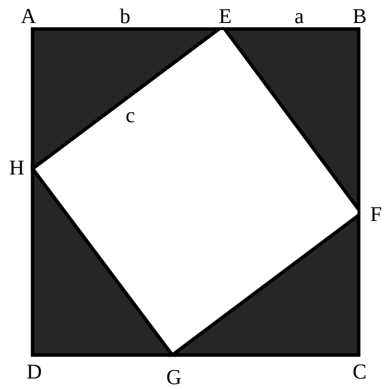
Med denna formulering är vidstående figur meningsfull.

En mer algebraisk formulering av satsen ges också av figuren:
Om längderna av kateterna i en rätvinklig triangel är a respektive b och hypotenusans längd är c så är $a^2 + b^2 = c^2$.

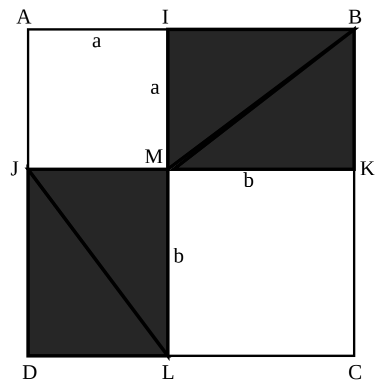


Ett klassiskt bevis för Pythagoras sats är ett *pusselbevis* som bygger på just areatolkningen av satsen. Idén beviset bygger på är att en kvadrat med sidorna $a + b$ kan fyllas med kvadrater och trianglar på olika sätt.

Konstruera först en kvadrat $ABCD$ med sidan $a + b$. Avsätt punkter E på AB, F på BC, G på CD och H på DA så att $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = b$. Trianglarna $\triangle AEH$, $\triangle BFE$, $\triangle CGF$ och $\triangle DHG$ är alla kongruenta med den ursprungliga triangeln (s-v-s). Hypotenusan är därför c.
Således är fyrhörningen $EFGH$ liksidig med sidan c. Dessutom har vi att vinkelsumman i $\triangle AEH$ är två räta. Eftersom en av vinklarna är rät så är summan av de spetsiga vinklarna en rät vinkel. Därför måste $\angle E$ vara rät. Samma gäller de övriga hörnen i $EFGH$. Alltsså är $EFGH$ en kvadrat med sidan c.



Konstruera sedan en ny kvadrat $ABCD$ med sidan $a + b$. Avsätt punkter I på AB, J på AD, K på BC och L på DC så att $|AI| = |AJ| = |BK| = |DL| = a$. Sträckorna L och JK delar in kvadraten $ABCD$ i fyra delar. Alla vinklar som uppkommer är räta. Av detta följer att fyrhörningarna $AIMJ$ och $KCLM$ är kvadrater med sidorna a respektive b och att fyrhörningarna $IBKM$ och $MLDJ$ är rektanglar med sidorna a och b. Diagonalerna BM och MD delar dessa rektanglar i trianglar som är kongruenta med den givna triangeln.



Genom att subtrahera de fyra trianglarnas areor från kvadratens $ABCD$ area finner vi att $a^2 + b^2 = c^2$.

En annan formulering av satsen lyder:

I alla rätvinkliga trianglar är förhållandet mellan de två kateterna, a och b, och hypotenusan c sådant att $a^2 + b^2 = c^2$.

Denna formulering leder till ett annat, minst lika klassiskt, bevis för satsen.

Kalla triangelns hörn A, B och C där $\angle C$ är rät.

Drag höjden från C. Denna skär AB i D.

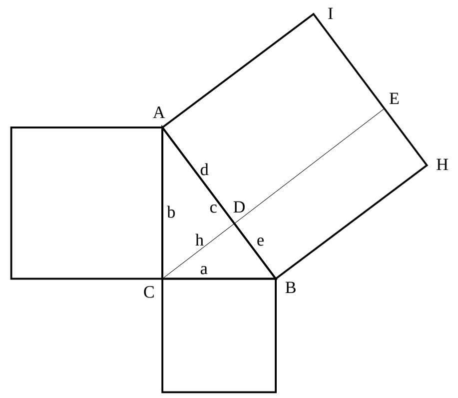
De tre trianglarna $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ och $\triangle CBD$ är likformiga eftersom de har lika vinklar.

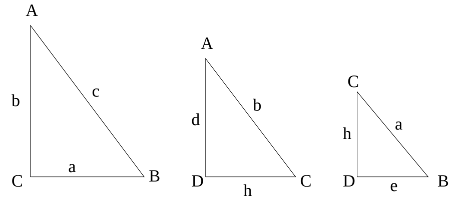
Av likformigheten följer (bland annat) att
$\frac{b}{c} = \frac{d}{b}$ och $\frac{a}{c} = \frac{e}{a}$

Multiplicera den första ekvationen med $b \cdot c$ och den andra med $a \cdot c$. Då erhålls

$b^2 = d \cdot c$ och $a^2 = e \cdot c$.

Geometriskt kan detta tolkas som att kvadraten med sida a har samma area som rektangeln $BDEH$ och kvadraten med sida b har samma area som rektangeln $ADEI$.





Addera likheterna, utnyttja först distributiva lagen och sedan $d + e = c$ så erhålls:

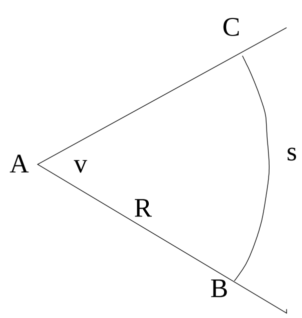
$a^2 + b^2 = e \cdot c + d \cdot c = (e + d) \cdot c = c^2$.

3.2 Trianglar och trigonometri

Det är naturligtvis välkänt för alla läsare att talet π *definieras* som förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter. Så här långt har vi egentligen endast talat om längd av sträckor men vi kommer senare i detta kapitel, se 3.5 att ta upp längd av cirkelbågar.

3.2.1 Vinkelmätning

I detta avsnitt definierar vi helt enkelt mätetalet för en vinkel $\angle A$ som $\frac{s}{R}$, där s är längden av en cirkelbåge BC med centrum i A då B och C är cirkelns skärningspunkter med vinkelbenen och R är cirkelns radie.
Eftersom alla cirklar är likformiga är denna kvot oberoende av cirkelns radie. Man kan istället välja att definiera vinkelns mått som längden av cirkelbågen BC då radien är 1.

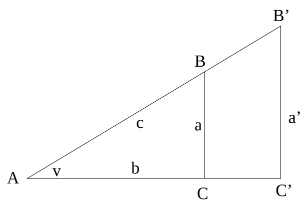


I huvudsak använder man radianer som enhet vid vinkelmätning i matematiken. Men just inom geometri är det vanligare med grader. Vinkelsumman i en triangel är π eller 180°. En rät vinkel är $\dfrac{\pi}{2}$ eller 90°. De spetsiga vinklarna i en likbent rätvinklig triangel är $\dfrac{\pi}{4}$ eller 45°. En liksidig triangel har vinklarna $\dfrac{\pi}{3}$ eller 60°.
Sambandet mellan de två sätten att ange en vinkels storlek ges av

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radianer och 1 radian } = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ}$$

3.2.2 Trigonometri

Betrakta nu två rätvinkliga trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle AB'C'$med $\angle A = v$, $\angle C = \angle C' = \pi/2$ och $\angle B = \angle B' = \pi/2 - v$. Hypotenusornas längder är $|AB| = c$ och $|A'B'| = c'$. Kateternas längder är $|BC| = a$ och $|B'C'| = a'$ samt $|AC| = b$ och $|A'C'| = b'$.



Eftersom de två trianglarna är likformiga gäller det att $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

Men då följer det att $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a'}{c'}$, $\quad \dfrac{b}{c} = \dfrac{b'}{c'}$ och $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$.

Dessa tre kvoter beror alltså endast av vinkeln och vi kan göra följande definitioner:

$$\sin v = \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusa}}, \qquad \cos v = \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}} \quad \text{och}$$

$$\tan v = \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}.$$

Av definitionerna följer det att

$$\boxed{a = c \cdot \sin v, \quad b = c \cdot \cos v, \quad a = b \cdot \tan v}$$

Det följer också direkt av definitionerna att *sinus* och *tangens* för en vinkel v, $\sin v$ och $\tan v$, ökar om v ökar, men *cosinus*, $\cos v$, minskar.

Eftersom $\angle B = \dfrac{\pi}{2} - v$ så gäller det att

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v, \quad \tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \text{ och } \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{1}{\tan v}}$$

.

Den sista kvoten $\dfrac{1}{\tan v}$ kallas *cotangens* för v, $\cot v = \dfrac{b}{a}$.

Sats: *Trigonometriska ettan*

För alla vinklar $0 < v < \frac{\pi}{2}$ är

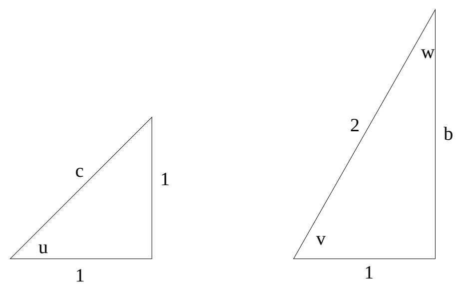
$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Bevis: Med beteckningar som i definitionen är $\sin v = \dfrac{a}{c}$ och $\cos v = \dfrac{b}{c}$.

Då är $\sin^2 v + \cos^2 v = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2} = \{\text{Pythagoras sats}\} = \dfrac{c^2}{c^2} = 1$.

Anmärkning: Vi kommer att definiera $\sin v$ och $\cos v$ för vinklar som inte är spetsiga längre fram i kapitlet. Trigonometriska ettan gäller även dessa vinklar.

Vi härleder nu värdena för $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ då v är är en spetsig vinkel i en likbent, rätvinklig triangel eller i en halv liksidig triangel dvs. då v är $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$ eller $\dfrac{\pi}{3}$.



Pythagoras sats ger oss att $c = \sqrt{2}$ och $b = \sqrt{3}$.

Vidare är $u = \dfrac{\pi}{4}$, $v = \dfrac{\pi}{3}$ och $w = \dfrac{\pi}{6}$.

Definitionerna ger oss då följande värden:

v	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin v$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos v$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan v$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

3.2.3 Övningar

3.2.1 Hur många grader och radianer är

a) 1/2 varv b) 1/8 varv c) 1/3 varv

d) 1/6 varv e) 3/4 varv f) 7/6 varv

3.2.2 Omvandla till radianer:

a) $90°$ b) $30°$ c) $45°$ d) $270°$

e) $18°$ f) $150°$ g) $110°$

3.2.3 Omvandla till grader:

a) 3π b) $\pi/2$ c) $3\pi/4$ d) $5\pi/12$

3.2.4 Beräkna längden av periferibågen i en cirkelsektor med

a) centrumvinkeln $v = 60°$ och radien $R = 2$ (längdenheter)

b) $v = 150°$ och $R = 5$ c) $v = 300°$ och $R = 4/3$.

3.2.5 Bestäm vinklen mellan två (närliggande) sidor i en regelbunden

a) 6-hörning b) 5-hörning c) n-hörning.

Ledning: Vinkelsumman i en triangel är $180° = \pi$ (radianer).

3.2.6 Bestäm värdet av

a) $2\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\cot\dfrac{\pi}{3}$

b) $\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}$

c) $(\sin 60° + \sin 45°)(\cos 30° - \cos 45°)$

d) $(\tan 60° - \tan 45°)/(1 + \tan 60° \cdot \tan 45°)$.

3.2.7 Solvera (bestäm alla sidor och vinklar) följande rätvinkliga trianglar (beteckningar enligt figur):

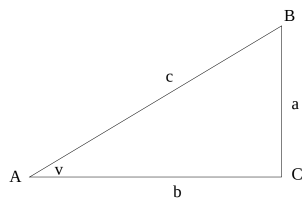
a) $c = 4,0$ och $A = 35°$

b) $a = 3,0$ och $A = \dfrac{\pi}{5}$

c) $a = 2,0$ och $c = 3,0$

d) $a = 2,0$ och $b = 3,0$

e) $b = 5,0$ och $B = 55°$.



3.2.8 Bestäm (för $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$)

a) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 3/5$, [Ledning: Rita en triangel med $a = 3$ och $c = 5$]

b) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 2/3$

c) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 1/3$

d) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 0,4$

e) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 1/2$

f) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 24/7$

g) $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0,7$

3.3 Koordinatsystem

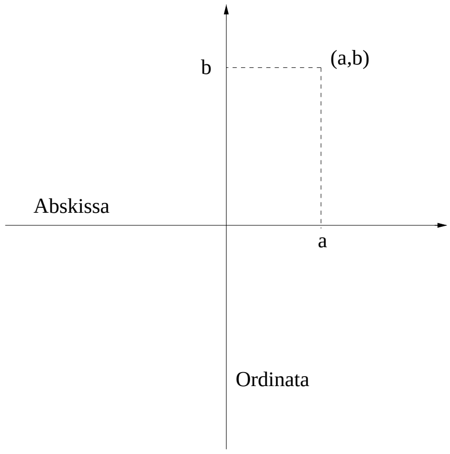
Analytisk geometri handlar om ekvationer för att beskriva geometriska objekt. Här skall vi enbart studera räta linjens ekvation och cirkeln ekvation samt grunderna till trigonometrin. Grunden till det hela är *koordinatsystem*.

Ett koordinatsystem består av två linjer som skär varandra under rät vinkel i en punkt. Oftast ritar man ena linjen horisontellt, den kallas *abskissan*, och den andra linjen *ordinatan* ritas vertikalt. Deras skärningspunkt kallas *origo*. Abskissa och ordinata kallas koordinatsystemets *axlar*. Givetvis kan koordinatsystem vridas om man så önskar, men i detta kapitel håller vi oss till horisontell abskissa.

De två koordinataxlarna är *tallinjer*. Origo motsvarar talet 0 på både abskissa och ordinata, punkterna till höger på abskissan och uppåt på ordinatan motsvarar positiva tal, de till vänster och nedåt motsvarar negativa tal. Om punkten P motsvarar talet a så är $|a| =$ avståndet mellan origo och punkten P.

Varje punkt i planet kan nu tilldelas koordinater (a, b) genom att vi drar en linje genom punkten parallell med abskissan. Denna linje skär abskissan i en punkt som motsvarat talet a. Drag också en linje parallell med ordinatan. Denna skär ordinatan i punkten som motsvarar b.

Ganska ofta använder man variablerna x och y för koordinaterna, Abskissan kallas då x-axeln och ordinatan y-axeln.

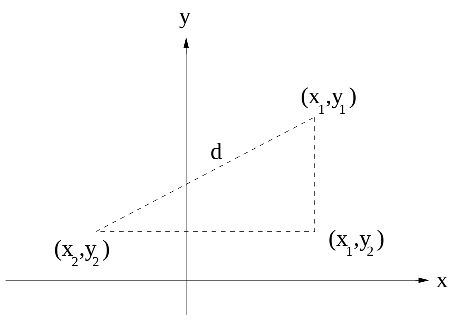


Vi har således att varje punkt i planet motsvarar exakt ett par av reella tal och varje sådant par motsvarar exakt en punkt i planet. Därför säger vi att planet är $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ och } y \in \mathbb{R}\}$.

De två koordinataxlarna delar in planet i fyra delar, *kvadranter*. Dessa numreras moturs med början i första kvadranten där både x- och y-koordinaten är positiva. I andra kvadranten är $x < 0$ och $y > 0$. I tredje är båda negativa och i fjärde är $x > 0$ och $y < 0$.

Då koordinatsystemet har vinkelräta, *ortogonala*, axlar och avstånden på axlarna motsvarar absolutbeloppen av talen kallas koordinatsystemet *ortonormerat* eller *cartesiskt* efter den franske matematikern Descartes med latinska namnet Cartesius (1596-1650).

Betrakta nu två punkter i planet (x_1, y_1) och (x_2, y_2). Dessa är hörn i en rätvinklig triangel med (x_1, y_2) som det tredje hörnet. De två kateternas längder är då $|x_1 - x_2|$ och $|y_1 - y_2|$.
Pythagoras sats ger oss nu att hypotenusans längd är $\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2{}^2|}$.



Eftersom avståndet från en punkt till en annan är längden av sträckan mellan punkterna kan avståndet mellan (x_1, y_1) och (x_2, y_2) beräknas med *avståndsformeln*:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3.3.1 Övningar

3.3.1 Bestäm avståndet mellan

a) $(-6, 0)$ och origo
b) origo och $(2, 3)$
c) $(2, 2)$ och $(-3, 2)$
d) $(2, -2)$ och $(-4, 6)$
e) $(-2, 5)$ och $(-4, 8)$. (Rita figur!)

3.3.2 Bestäm en punkt på y-axeln, som ligger lika långt från punkterna

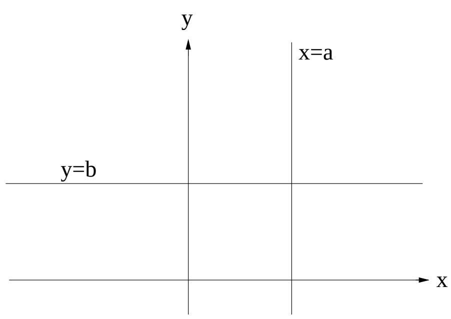
a) $(-3, 2)$ och $(4, 1)$
b) $(-2, 1)$ och $(4, 5)$ (Rita figur!)

3.3.3 Bestäm läget för en liksidig triangels tredje hörn då två av hörnen ligger i

a) $(-1, -1)$ och $(3, 1)$.
b) $(2, 3)$ och $(-1, 0)$.

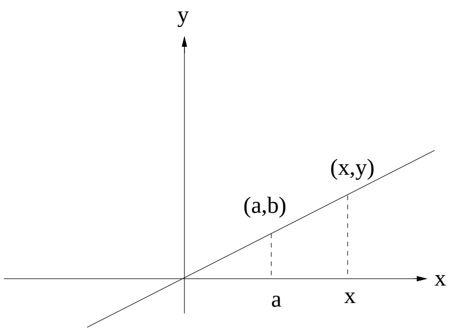
3.4 Räta linjens ekvation

Betrakta först en linje parallell med x-axeln i ett cartesiskt koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$. Eftersom alla punkter på denna linje har samma y-koordinat och alla punkter med denna y-koordinat ligger på linjen, kan vi beskriva linjen som $\{(x, y) : y = b\}$. Vi säger att ekvationen $y = b$ är ekvationen för en rät linje parallell med y-axeln.
På samma sätt är $x = a$ ekvationen för en rät linje parallell med x-axeln.



Vi skall nu härleda ekvationer för linjer som inte är parallella med någon av koordinataxlarna och börjar med en linje L som går genom origo och någon punkt (a, b) i första kvadranten.

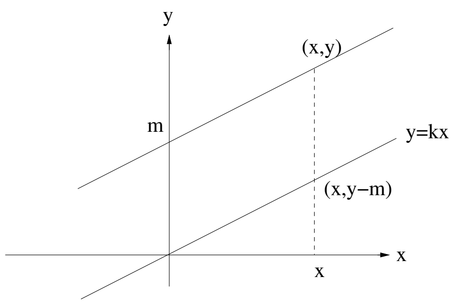
Låt (x, y) vara en godtycklig punkt på L med $x > 0$. Vi har då två rätvinkliga trianglar med ett hörn i origo och ett på linjen. Dessa två trianglar är likformiga eftersom de har lika vinklar. Då följer det att $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$ vilket ger $y = kx$ där $k = \frac{b}{a}$. (Konstanten k kallas *riktningskoefficient* för linjen.)



Om punkten (x, y) ligger på linjen men $x < 0$ och $y < 0$, så gäller som ovan att $\frac{b}{a} = \frac{-y}{-x}$ vilket också ger $y = kx$.

Med ett motsvarande resonemang ser man att linjer genom origo och en punkt i fjärde kvadranten har en ekvation $y = kx$, där $k < 0$.

Betrakta nu en rät linje som skär y-axeln där $y = m$. Denna är parallell med en linje genom origo och riktningskoefficient k. För punkten $(x, y - m)$ gäller då att $y - m = kx$.
Linjen genom $(0, m)$ har alltså ekvationen $y = kx + m$.



Exempel. Vi skall visa den s.k. *enpunktsformeln*: ekvationen för en rät linje, som är parallell med linjen $y = kx$ och går genom en *given punkt* (x_0, y_0) är

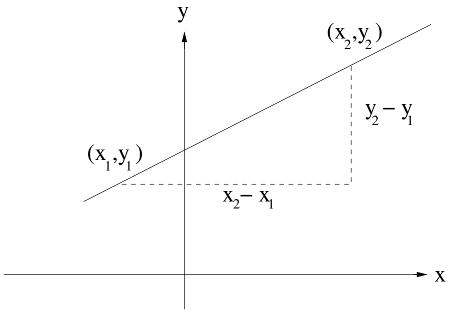
$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Lösning. Ekvationen $y - y_0 = k(x - x_0)$ kan skrivas om till $y = kx + m$ där $m = y_0 - kx_0$. Alltså är det ekvationen för en rät linje parallell med linjen $y = kx$.

Dessutom gäller det att insättning av $x = x_0$ och $y = y_0$ ger 0 i både vänster och höger led av ekvationen. Därför är $y - y_0 = k(x - x_0)$ ekvationen för en linje genom (x_0, y_0).
$\square$

Exempel. En rät linje, som går genom *två givna punkter* (x_1, y_1) och (x_2, y_2), har ekvationen $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$. Detta är den s.k. *tvåpunktsformeln* för räta linjen.

Lösning. Eftersom linjen går genom (x_1, y_1) och (x_2, y_2), där $x_1 \neq x_2$, så kan *riktningskoefficienten* beräknas:
$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Tillämpa nu enpunktsformeln med $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ så erhålls den sökta ekvationen.



$\square$

Vi har härlett tre typer av ekvationer för räta linjer. Dels $x = a$, dels $y = b$ och dels $y = kx + m$. Alla dessa kan skrivas $Ax + By + C = 0$ som är den *allmänna formen* för räta linjens ekvation. Till skillnad från de andra skrivsätten är inte ekvationen $Ax + By + C = 0$ entydigt bestämd. Både $x + 2y + 3 = 0$ och $2x + 4y + 6 = 0$ är ekvationer för en och samma linje. Man talar därför hellre om *en ekvation* för den räta linjen i stället för *ekvationen* för linjen.

Om $A = 0$, men $B \neq 0$ så fås en linje, $y = -C/B$, parallell med x-axeln, om $B = 0,\ A \neq 0$ en linje, $x = -C/A$ parallell med y-axeln och om $A \neq 0,\ B \neq 0$ en rät linje som skär båda axlarna. Riktningskoefficient för denna linje är $-\dfrac{A}{B}$.

Två linjer $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ och $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ är *parallella* om och endast om riktningskoefficienterna är lika dvs. om $k_1 = -A_1/B_1$ och $k_2 = -A_2/B_2$ är lika eller om $B_1 = B_2 = 0$.

Exempel. Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna $(2, 4)$ och $(-1, 3)$.

Lösning. Riktningskoefficienten $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3 - 4}{-1 - 2} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

Med enpunktsformeln fås linjens ekvation: $y - 4 = \dfrac{1}{3}(x - 2)$, dvs. $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{10}{3}$ eller $x - 3y + 10 = 0$. [Alternativt: $y - 3 = \dfrac{1}{3}(x + 1)$, som naturligtvis ger samma ekvation].

Svar: $x - 3y + 10 = 0$.

OBS: det är en god vana att kontrollera räkningarna genom att visa att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen! $\square$

Exempel. Sök skärningspunkten mellan linjerna $3x + 4y - 6 = 0$ och $2x + y - 5 = 0$.

Lösning. En punkt ligger på en linje om punktens koordinater satisfierar linjens ekvation. Punkten ligger på båda linjerna om punktens koordinater satisfierar båda ekvationerna, alltså om koordinaterna är en lösning till ekvationssystemet med de två linjernas ekvationer.

Vi har ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x + y \ \ = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 8x + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 5x \qquad = 14, \end{cases}$,
som ger

$x = 14/5 = 2,8$ och $y = (6 - 3x)/4 = -0,6$.

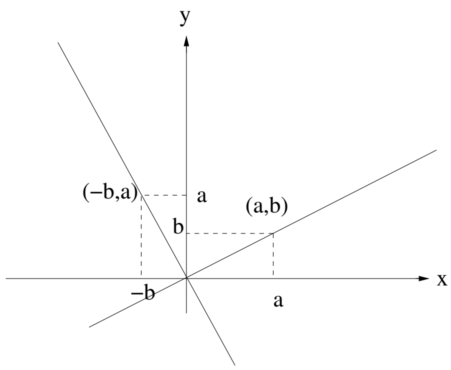
[*Eller:* Andra ekvationen ger $y = 5 - 2x$, som insatt i den första ekvationen ger $3x + 4(5 - 2x) = 6$ o.s.v.].

Svar: Skärningspunkten är $(2,8, -0,6)$. (Rita figur!) $\square$

En rät linje, som skär en annan given rät linje vinkelrätt, kallas **normal** till den givna linjen.

Av vidstående figur framgår att om man vrider linjen $y = kx$ en rät vinkel moturs, så kommer punkten (a, b) att hamna på $(-b, a)$. Av detta följer att normalen genom origo till linjen $y = kx$ har riktningskoefficienten $\dfrac{a}{-b}$.

Eftersom $k = \dfrac{b}{a}$ har vi att $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-1}{k}$.



Normalens riktningskoefficient är alltså $\dfrac{-1}{k}$, om den givna linjens riktningskoefficient är k.

OBS: Räta linjen $ax + by = c_1$ har normalen $bx - ay = c_2$.

Exempel. Bestäm en ekvation för linjen, som går genom $(2, -1)$ och är normal till $3x + 2y + 2 = 0$ [OBS: Punkten $(2, -1)$ ligger utanför den givna linjen].

Lösning. Den givna linjen, vars ekvation kan skrivas $y = -3x/2 - 1$, har riktningskoefficienten $k_1 = -3/2$. Normalens riktningskoefficient är därför $k_2 = -1/k_1 = 2/3$ och normalens ekvation: $y + 1 = \dfrac{2}{3}(x - 2)$, dvs. $2x - 3y - 7 = 0$. $\square$

3.4.1 Övningar

3.4.1 Bestäm en ekvation för räta linjen genom

a) origo med riktningskoefficienten $2/3$

b) $(2, 1)$ med riktningskoefficienten = $-2/3$

c) $(-2,3)$ parallell med x-axeln   d) $(-2,3)$ parallell med y-axeln.

(Rita figurer!)

3.4.2 Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna (rita figur!):

a) $(1,1)$ och $(2,3)$ b) $(-2,3)$ och origo   c) $(-1,0)$ och origo

d) $(-2,1)$ och $(2/3,1/3)$ e) $(4/3,-1/5)$ och $(3/7,2/9)$

f) $(-2/7,-3/23)$ och $(-2/7,8/69)$.

3.4.3 Sök skärningspunkterna mellan linjerna (rita figur!)

a) $2x+3y-6=0$ och $x+y-1=0$
b) $2x+3y=0$ och $x-2y+2=0$
c) $2x-3y-6=0$ och $4x-6y=36$
d) $3x+2y-4=0$ och $6x+4y=8$

3.4.4 Visa att om $a \neq 0$ och $b \neq 0$ så har den räta linjen genom punkterna $(a,0)$ och $(0,b)$ ekvationen $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3.4.5 Bestäm en ekvation för linjen genom punkterna:

a) $(2,0)$ och $(0,-4)$ b) $(0,3)$ och $(1,0)$ c) $(0,1)$ och $(0,0)$.

(rita figurer!)

3.4.6 Bestäm en ekvation för normalen till linjen

a) $2x+5y=0$ i origo   b) $3y-x=4$ i punkten $(-1,1)$

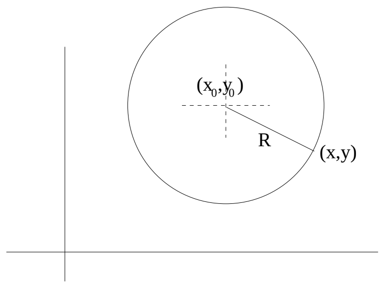
c) $5x+9y=0$ från punkten $(2,3)$ d) $x=4y+1$ från origo.

(Rita figurer!)

3.5 Cirkelns ekvation

En cirkel består av alla punkter i ett plan som har ett bestämt avstånd, *cirkelns radie*, till en bestämd punkt, *cirkelns medelpunkt* eller *centrum*.

Ekvationen för en *cirkel* med *radien* R *och medelpunkten* (x_0, y_0) är $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
Detta följer direkt av avståndsformeln.
Speciellt: $x^2 + y^2 = R^2$ är ekvationen för en cirkel med *radien* R och *medelpunkten* i *origo*.



Exempel. Angiv den geometriska betydelsen av ekvationen

$x^2 + 2x + y^2 - 3y = 3$

Lösning: Ekvationen kan (genom kvadratkomplettering) skrivas

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot y + \big(\frac{3}{2}\big)^2 = 3 + 1 + \big(\frac{3}{2}\big)^2$, dvs. $(x+1)^2 + \big(y - \frac{3}{2}\big)^2 = \big(\frac{5}{2}\big)^2$,

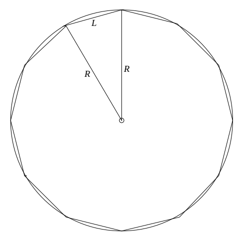
vilket betyder en cirkel med medelpunkt $(-1, \frac{3}{2})$ och radie $\frac{5}{2}$. (Rita figur!) $\square$

3.5.1 Cirkelns omkrets och area

Det vi kan mäta är längd av sträckor. För att mäta andra kurvor måste vi approximera kurvan med ett antal korta sträckor mellan punkter på kurvan. Ju fler punkter dess bättre approximation. Kurvans längd är gränsvärdet för dessa approximationer.

Då det gäller att beräkna cirkelns längd är det enklast att utgå från regelbundna n-hörningar med hörn på cirkeln. Så gjorde redan Arkimedes.

Man delar in n-hörningen i trianglar med spets i cirkelns medelpunkt och beräknar basens längd. Om man börjar med en regelbunden 6-hörning, som har basen R och sedan fördubblar antalet hörn gång på gång, så kan man beräkna basens längd med Pythagoras sats. Detaljerna i detta lämnas till läsaren.



Om cirkelradien är 1 så har 6-hörningen omkretsen 6. Eftersom π definierats så att cirkelomkretsen är 2π så får man närmevärdet 3 till π. Inte så bra, men det behövs inte så många fördubblingar av antalet hörn för att man skall få riktigt bra värde på π. För att få de miljontals decimaler som nu är bestämda krävs emellertid helt annan teknik.

En intressant observation man kan göra i figuren ovan är att trianglarna också delar in cirkelskivan i delar vars area vi kan beräkna. Om basen i varje triangel är L och höjden h så är arean $L \cdot h/2$. Höjden är i det närmaste samma som cirkelns radie. Då vi summerar alla triangelareorna får vi ungefär cirkelns omkrets multiplicerad med $R/2$. Eftersom omkretsen är $2 \cdot R \cdot \pi$ får vi arean till $\pi \cdot R^2$. Det är alltså *samma* förhållande mellan cirkelns omkrets och diametern som det mellan cirkelns area och arean av en kvadrat med radien som sida. Detta upptäckte också Arkimedes.

3.5.2 Cirklar och linjer

En linje som skär cirkeln kan göra det i en eller två punkter. Om det är två skärningspunkter, A och B så bildar sträckan AB en *korda* till cirkeln.. Om linjen skär cirkeln i endast en punkt, A, så säger vi att linjen *tangerar* cirkeln och att A är tangeringspunkten.

Av symmetriskäl är linjen genom cirkelns medelpunkt och en punkt A på periferin *normal* till cirkelns tangent i A.

Exempel. Vi bestämmer ekvationen för tangenten i punkten $(1, 2)$ till cirkeln med medelpunkt $(2, -1)$ och radie $\sqrt{10}$.

Lösning. Cirkelns ekvation är $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$. Insättning av $(x, y) = (1, 2)$ ger $VL = (1 - 2)^2 + (2 + 1)^2 = (-1)^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$ vilket visar att $(1, 2)$ ligger på cirkeln.

Normalen till cirkeln genom $(1, 2)$ går också genom medelpunkten $(2, -1)$.

Riktningskoefficient för normalen är $\dfrac{2 - (-1)}{1 - 2} = \dfrac{3}{-1} = -3$.

Riktningskoefficient för tangenten är då $-\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

Tangentens ekvation erhålls med enpunktsformeln: $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1)$ vilket skrivs om till $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ eller $x - 3y + 5 = 0$. $\square$

Exempel. Vi bestämmer skärningspunkterna mellan cirklarna $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 8$ och $x^2 + 9x + y^2 - 3y = 10$.

Lösning. Skärningspunkter är lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + 4x + & y^2 - 2y & = & 8 \\ x^2 + 9x + & y^2 - 3y & = & 10 \end{cases}$$

Subtrahera första ekvationen från den andra. Då erhålls:

$$\begin{cases} x^2 + 4x & +y^2 - 2y & = & 8 \\ 5x & -y & = & 2 \end{cases}$$

Lös ut y och sätt in i första ekvationen:

$$\begin{cases} x^2 + 4x + & (5x - 2)^2 - 2(5x - 2) & = & 8 \\ & y & = & 5x - 2 \end{cases}$$

Den första ekvationen förenklas: $26x^2 - 26x = 0$ med lösningarna $x = 0$ som ger $y = -2$ och $x = 1$ som ger $y = 3$. Insättning av punkternas koordinater i cirklarnas ekvationer visar att båda punkterna ligger på båda cirklarna. Det är en god vana att göra sådan kontroll.

Svar: Skärningspunkterna är $(0, -2)$ och $(1, 3)$. $\square$

En cirkels ekvation är bestämd, om vi känner medelpunkt och radie, alltså om vi känner de *tre* storheterna $x_0,\ y_0$ och R. Detta betyder att *tre* av varandra oberoende villkor helt bestämmer en cirkel. T.ex. genom tre givna punkter, som ej ligger i rät linje, går en och endast en cirkel.

Exempel. Vi bestämmer ekvationen för cirkeln som går genom de tre punkterna $(2, 2)$, $(2, -4)$ och $(-2, 0)$.

Lösning. Kalla medelpunkten (a, b) och radien R.

Cirkelns ekvation är $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

De tre punkterna ger tre ekvationer:

$$\left\{\begin{array}{rrcl} (2-a)^2+ & (2-b)^2 & = & R^2 \\ (2-a)^2+ & (-4-b)^2 & = & R^2 \\ (-2-a)^2+ & (0-b)^2 & = & R^2 \end{array}\right.$$

Utveckla kvadraterna och subtrahera första ekvationen från de övriga.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} a^2-4a+4+ & b^2-4b+4 & = & R^2 \\ & 12b+12 & = & 0 \\ 8a+ & 4b-4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Den andra ekvationen ger nu $b = -1$ som insatt i tredje ger $a = 1$. Dessa värden ger i första ekvationen $R = \sqrt{10}$.

Svar: Cirkelns ekvation är $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

Som tidigare kontrollerar man att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen. $\square$

3.5.3 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 3a

3.5.1 Bestäm en ekvation för cirkeln med följande medelpunkt och radie:

a) origo; $R = 9$ b) $(2, -3); R = 7$ c) $(-6, 0); R = 2,5$

3.5.2 Ge en ekvation för en cirkel, som har medelpunkten $(-1, 3)$ och går genom

a) origo b) $(1, 1)$ c) $(7, 0)$

3.5.3 Ange den geometriska betydelsen av ekvationen

a) $x^2 + y^2 - 3 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4y = 5$

c) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$ d) $x^2 + y^2 + 4x - y + 4 = 0$

e) $36x^2 + 36y^2 - 36x + 48y = 39$.

3.5.4 Sök skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 8$ och räta linjen

a) $5x - y - 2 = 0$ b) $2x - 3y - 6 = 0$ c) $4x - y - 6 = 0$

3.5.5 Ge en ekvation för en cirkel, som går genom

a) $(1, -3), (-3, 1)$ och $(-5, -1)$ b) $(6, 7), (-3, 4)$ och $(-18, -1)$

c) $(1, 6)$ och $(-3, -2)$ och har medelpunkt på y-axeln.

3.6 Trigonometri

3.6.1 De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar

I avsnitt 3.2 beskrev vi hur man mäter en vinkel med längden av en cirkelbåge. Detta skall vi utnyttja nu för att definiera $\sin v,\ \cos v,\ \tan v$ och $\cot v$ för godtyckliga vinklar.

I ett xy-plan är origo, O, medelpunkt i enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Punkten $(1, 0)$ är cirkelns skärningspunkt med positiva x-axeln.

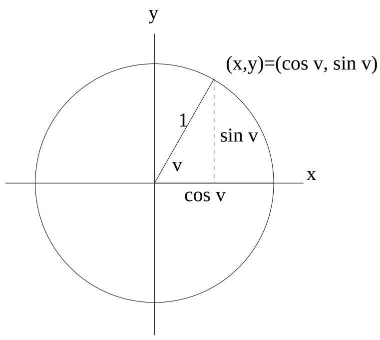
Låt v vara en vinkel $0 \le v \le 2\pi$. Tag Q på cirkeln så att $v = \angle POQ$. Det finns två möjliga val för Q (om inte $v = \pi$). Q skall väljas så att cirkelbågen PQ med längd v ligger helt eller delvis i första kvadranten.

Ett praktiskt sätt att tänka om detta är att låta OP vara en visare, vridbar kring O. Då visaren vrids vinkeln v *moturs* genomlöper visarens spets cirkelbågen med längd v.

Det finns en stor fördel med detta synsätt. Vi kan tänka oss att visaren vrids mer än ett varv och låta vinkeln vara längden av den genomlöpta cirkelbågen. Vinklar kan då vara större än 2π. Dessa har inte längre någon geometrisk motsvarighet. Den punkt som motsvarar vinkeln $\frac{5\pi}{2}$ är $(0, 1)$ eftersom $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$. Visaren vrids ett och ett kvarts varv.

Vinklarna $\frac{5\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ motsvaras av *samma punkt* men är *olika vinklar*.
Om visaren vrids *medurs* är vinkeln negativ. Vinkeln $-\frac{3\pi}{2}$ motvaras också av $(0, 1)$.

En första observation vi kan göra är att om $0 < v < \frac{\pi}{2}$ så är $Q = (\cos v, \sin v)$. Denna observation ligger till grund för den allmänna definitionen av de trigonometriska funktionernas värden för godtyckliga vinklar.



Definition: Låt $Q = (x, y)$ motsvara vinkeln v enligt ovan. Då är

$$\cos v = x, \quad \sin v = y, \quad \tan v = \tfrac{y}{x} \text{ om } x \neq 0 \quad \text{och} \quad \cot v = \tfrac{x}{y} \text{ om } y \neq 0$$

För vinklar v sådana att $x = 0$ är $\tan v$ odefinierat. För vinklar v sådana att $y = 0$ är $\cot v$ odefinierat.

Eftersom en ökning eller minskning av v med 2π motsvarar en vridning av ”visaren” OP ett helt varv mot- eller medurs följer det att

$$\sin v = \sin(v + 2\pi) = \sin(v + n \cdot 2\pi) \quad \text{där} \quad n = \text{heltal}$$
$$\cos v = \cos(v + 2\pi) = \cos(v + n \cdot 2\pi) \quad \text{där} \quad n = \text{heltal}$$

Exempel. Vi bestämmer $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ *Lösning.* $-\frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 2\pi$, varför $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$. $\square$

Av definitionerna följer direkt, att

$\sin^2 v + \cos^2 v = 1,$ *trigonometriska ettan*

$-1 \leq \sin v \leq 1,$ dvs. $|\sin v| \leq 1$ för *alla* vinklar v

$-1 \leq \cos v \leq 1,$ dvs. $|\cos v| \leq 1$ för *alla* vinklar v

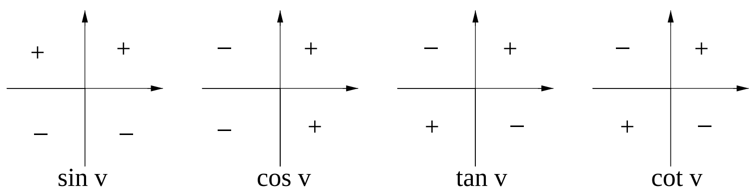
$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\cot v}$$

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v}$$

Genom att bestämma den punkt som motsvarar en viss vinkel kan man se följande:

v	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin v$	0	1	0	-1	0
$\cos v$	1	0	-1	0	1
$\tan v$	0	odefinierat	0	odefinierat	0
$\cot v$	odefinierat	0	odefinierat	0	odefinierat

Eftersom $\sin v = y$ är $\sin v$ *positiv* för vinklar i första och andra kvadranten och *negativ* i tredje och fjärde. Liknande regler fås för $\cos v,\ \tan v$ och $\cot v$:



Exempel. Vi bestämmer $\sin v$, om $\cos v = 1/4$ och $3\pi/2 < v < 2\pi$.

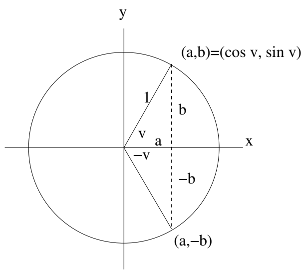
Lösning. I fjärde kvadranten är $\sin v$ negativt, varför trigonometriska ettan $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ ger

$\sin v = -\sqrt{1-\cos^2 v} = -\sqrt{1-(1/4)^2} = -\sqrt{15}/4.$ $\square$

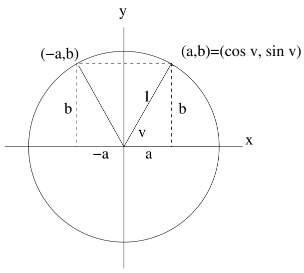
3.6.2 Några enkla formler, som sammanhänger med speglingar

Antag att punkten (a, b) på enhetscirkeln svarar mot vinkeln v, dvs. att $a = \cos v$ och $b = \sin v$. ((a, b) är en godtycklig punkt på cirkeln. Vi ritar den för enkelhets skull i första kvadranten).

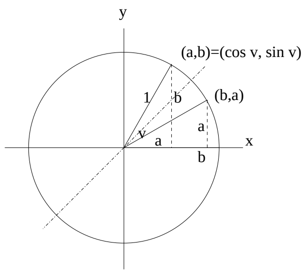
Speglar man (a, b) i x-axeln hamnar man i punkten $(a, -b)$ med vinkeln $(-v)$.
Alltså är $\cos(-v) = a = \cos v$ och
$\sin(-v) = -b = -\sin v$
$\tan(-v) = \frac{-b}{a} = -\tan v$ och $\cot(-v) = \frac{a}{-b} = -\cot v$.



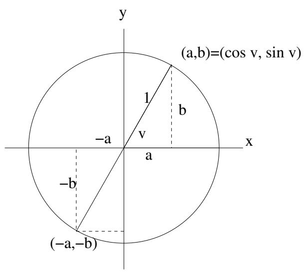
Spegelpunkten till (a, b) m.a.p. y-axeln är $(-a, b)$ med vinkeln $(\pi - v)$.
Då är $\cos(\pi - v) = -a = -\cos v$ och
$\sin(\pi - v) = b = \sin v$.
Som ovan $\tan(-v) = -\tan v$ och $\cot(-v) = -\cot v$



Spegelpunkten till (a, b) m.a.p. linjen $y = x$ är (b, a) med vinkeln $\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)$.
Då är $\cos(\frac{\pi}{2} - v) = b = \sin v$,
$\sin(\frac{\pi}{2} - v) = a = \cos v$,
$\tan(\frac{\pi}{2} - v) = \frac{a}{b} = \cos v / \sin v = \cot v$ och
$\cot(\frac{\pi}{2} - v) = \frac{b}{a} = \tan v$.



Spegling av (a, b) i origo ger $(-a, -b)$ med vinkeln $(v + \pi)$.
Man får $\cos(v + \pi) = -a = -\cos v$ och $\sin(v + \pi) = -a = -\sin v$, samt $\tan(v + \pi) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \tan v$ och $\cot(v + \pi) = \cot v$



Vi sammanfattar formlerna, som alltså gäller för godtyckliga vinklar:

$$\begin{array}{ll}
\sin(-v) = -\sin v & \tan(-v) = -\tan v \\
\cos(-v) = \cos v & \cot(-v) = -\cot v \\
 & \\
\sin(\pi - v) = \sin v & \tan(\pi - v) = -\tan v \\
\cos(\pi - v) = -\cos v & \cot(\pi - v) = -\cot v \\
 & \\
\sin(\pi/2 - v) = \cos v & \tan(\pi/2 - v) = \cot v \\
\cos(\pi/2 - v) = \sin v & \cot(\pi/2 - v) = \tan v \\
 & \\
\sin(v + \pi) = -\sin v & \tan(v + \pi) = \tan v \\
\cos(v + \pi) = -\cos v & \cot(v + \pi) = \cot v
\end{array}$$

Kommentar: Det är värdefullt att själv kunna härleda formlerna med hjälp av figurer i stället för att slå upp dem. Det är också värdefullt att kunna dem utantill.

Exempel. Bestäm $\sin \dfrac{5\pi}{6}$

Lösning. Vinkeln $5\pi/6 = 150° = 180° - 30° = \pi - \pi/6$ ligger i andra kvadranten. (Rita figur!).

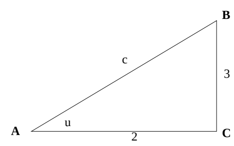
Sambandet $\sin(\pi - v) = \sin v$ ger $\sin(5\pi/6) = \sin(\pi - \pi/6) = \sin \pi/6 = \sin 30° = 1/2$. □

Exempel. Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = -3/2$ och $-\pi/2 < v < 0$.

Lösning. Metod 1:

Rita en hjälptriangel med $\tan u = 3/2$ och $0 < u < \pi/2$. Triangeln behöver inte vara skalenlig, den är endast ett stöd för kalkylerna.

Pythagoras sats ger $c = \sqrt{13}$.
Då är $\sin u = 3/\sqrt{13}$ och $\cos u = 2/\sqrt{13}$.



Av formlerna ovan följer att $\sin v = \pm \sin u$ och $\cos v = \pm \cos u$.
I fjärde kvadranten är $\sin v < 0$ och $\cos v > 0$.
Alltså är $\sin v = -3/\sqrt{13}$ och $\cos v = 2/\sqrt{13}$.

Metod 2: Använd formeln $\tan v = \sin v / \cos v$ samt ”trigonometriska ettan”:

$$\begin{cases} \tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = -\frac{3}{2} \\ \sin^2 v + \cos^2 v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin v = -\frac{3}{2}\cos v \\ \frac{9}{4}\cos^2 v + \cos^2 v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos v = \pm 2/\sqrt{13} \\ \sin v = \mp 3/\sqrt{13} \end{cases}$$

Eftersom $\cos v > 0$ och $\sin v < 0$ i fjärde kvadranten, får vi följande

Svar: $\sin v = -3/\sqrt{13}$ och $\cos v = 2/\sqrt{13}$. $\square$

3.6.3 Snedvinkliga trianglar. Areasatsen. Sinus- och cosinusteoremen.

En vinkel mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$ kallas *spetsig* medan en vinkel mellan $\frac{\pi}{2}$ och π kallas *trubbig*. I triangeln nedan till vänster är B trubbig, i den högra är B spetsig.

En triangel har antingen tre spetsiga vinklar, den kallas då spetsvinklig, eller en trubbig och två spetsiga då den kallas trubbvinklig, eller en rät vinkel då den som bekant kallas rätvinklig.

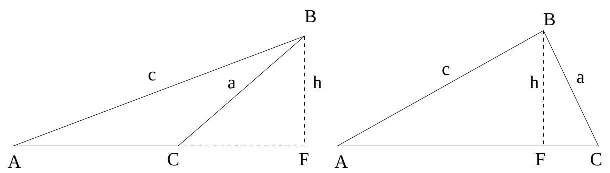
Ganska ofta beror kalkyler eller resonemang på om triangeln är spets-, rät-, eller trubbvinklig. Det är därför viktigt att övertyga sig om att påståenden etc. är allmängiltiga och inte bara gäller t.ex. spetsvinkliga trianglar.

För att illustrera detta inleder vi med

Areasatsen: För en *triangels area* T gäller

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$$

dvs. arean är halva produkten av två sidors längder och sinus för mellanliggande vinkel.



För att bevisa areasatsen konstaterar vi att arean av en triangel är *basen* $\cdot$ *höjden /2*. I båda trianglarna ovan är basen $|AC| = b$. Punkten F är fotpunkt till höjden som kan beräknas på två sätt. Dels är $h = c \cdot \sin A$, men h kan även beräknas med hjälp av a och C. I den trubbvinkliga triangeln är $h = a \cdot \sin(\pi - C)$, i den spetsvinkliga är $h = a \cdot \sin C$.

Men $\sin(\pi - C) = \sin C$. Alltså gäller $h = a \cdot \sin C$ i båda trianglarna.

Vi har då att $T = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \dfrac{b \cdot a \cdot \sin C}{2}$.

Givetvis kan man låta de två triangelhörnen A och B byta roll vilket innebär att det även gäller att $T = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}$ och satsen är bevisad.

Om arean T multipliceras med 2 och divideras med abc erhålls följande sats.

Sinusteoremet:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Anmärkning: Sinusteoremet gäller naturligtvis även för rätvinkliga trianglar. (Visa detta!)

Exempel. Solvera en triangel med $a = 7,0,\ b = 5,5$ och $B = 40°$.

Lösning: Sinusteoremet ger $\sin A = \dfrac{a}{b} \cdot \sin B = \dfrac{7,0}{5,5} \cdot \sin 40° \approx \dfrac{7,0}{5,5} \cdot 0,643 \approx 0,818$. Ekvationen $\sin A \approx 0,818$ har lösningar $A_1 \approx 54,9°$ (spetsig vinkel) och $A_2 = 180° - A_1 \approx 125,1°$ (trubbig vinkel). [ty $\sin A_2 = \sin(180° - A_1) = \sin A_1$].

Fall 1: $A_1 \approx 54,9°$ ger vinkeln $C_1 = 180° - B - A_1 \approx 85,1°$. Med sinusteoremet fås sidan $c_1 = b \cdot \dfrac{\sin C_1}{\sin B} \approx 5,5 \cdot \dfrac{\sin 85,1°}{\sin 40°} \approx 5,5 \cdot \dfrac{0,996}{0,643} \approx 8,5$.

Fall 2: $A_2 \approx 125,1°$ ger vinkeln $C_2 = 180° - B - A_2 \approx 14,9°$, och sidan $c_2 = b \cdot \sin C_2 / \sin B \approx 5,5 \cdot \sin 14,9° / \sin 40° \approx 5,5 \cdot 0,257/0,643 \approx 2,2$.

Svar: $A_1 \approx 54,9°,\ C_1 \approx 85,1°,\ c_1 \approx 8,5$ eller
$A_2 \approx 125,1°,\ C_2 \approx 14,9°,\ c_2 \approx 2,2$. $\square$

Vi skall nu härleda **cosinusteoremet** för en triangel (med beteckningar enligt föregående figur):

Låt $|AC| = b$ och $|CF| = p$. Då är $p = a \cdot \cos(\pi - C) = -a \cdot \cos C$ om C är trubbig och $p = a \cdot \cos C$ om C är spetsig. I båda fallen är $|AF| = b - a \cdot \cos C$.

Pythagoras' sats (på de två deltrianglarna) ger, både då C är trubbig och då C är spetsig: $a^2 = h^2 + p^2 = h^2 + (\pm a \cdot \cos C)^2$ och

$c^2 = h^2 + (b - a \cdot \cos C)^2 = h^2 + (a \cdot \cos C)^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Vi har således visat

Cosinusteoremet:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Anmärking: Om $C = 90°$ fås $c^2 = a^2 + b^2$ dvs. Pythagoras' sats.

3.6.4 Additions- och subtraktionsformler för de trigonometriska funktionerna

OBS: I allmänhet är $\sin(u + v)$ *ej* lika med $\sin u + \sin v$. T.ex. $u = v = 30°$ ger $\sin(u+v) = \sin 60° = \sqrt{3}/2$ medan $\sin u+\sin v = 2\cdot \sin 30° = 2\cdot 0,5 = 1 \neq \sqrt{3}/2$.

Istället gäller följande formler (som också är bra att *kunna utantill*):

$$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$
$$\sin(u - v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$$

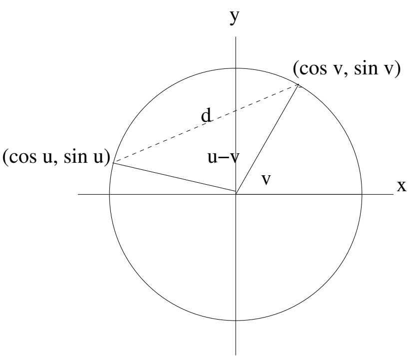
$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$
$$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\cdot\tan v}$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\cdot\tan v}$$

Vi visar först formeln för $\cos(u - v)$:

Tag punkter $P = (x_1, y_1)$ och $Q = (x_2, y_2)$ på enhetscirkeln så att $(x_1, y_1) = (\cos u, \sin u)$ och $(x_2, y_2) = (\cos v, \sin v)$.



Då är $x_1^2 + y_1^2 = 1$ och $x_2^2 + y_2^2 = 1$

Tillämpa cosinusteoremet på triangeln $\triangle OPQ$. Det ger $d^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(u - v)$.

Med avståndsformeln fås också
$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 =$
$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 =$
$(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) =$
$1 + 1 - 2(\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v)$.

En jämförelse av de två uttrycken för d^2 ger $2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(u - v) = 2 - 2(\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v)$ vilket förenklas till formeln för $\cos(u - v)$.

Formeln för $\cos(u-v)$ kan sedan utnyttjas för att bevisa de övriga formlerna. Vi lämnar detaljerna till läsaren och ger endast en fingervisning till hur det kan göras.

$\cos(u + v) = \cos(u - (-v)])$, Använd formlerna för $\cos(-v)$ och $\sin(-v)$.

$\sin(u + v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u + v)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right)$.

$\sin(u - v)$. Samma idé som för $\cos(u - v)$

$\tan(u+v) = \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}$. Utveckla med formlerna för $\sin(u+v)$ och $\cos(u+v)$, dividera täljare och nämnare med $\cos u \cdot \cos v$

$\tan(u - v)$. Samma idé som för $\cos(u - v)$

Exempel. Beräkna $\sin 75°$ exakt.

Lösning: $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{4} \cdot \sin\dfrac{\pi}{6}$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+1)\sqrt{2}/4 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4.$ □

Formler för dubbla vinkeln

Genom att sätta $u = v$ i summa formlerna får man direkt formler för dubbla vinkeln.

$$
\begin{aligned}
\sin 2u &= 2 \cdot \sin u \cdot \cos u \\
\tan 2u &= \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u} \\
\cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\
\cos 2u &= 2\cos^2 u - 1 \\
\cos 2u &= 1 - 2\sin^2 u
\end{aligned}
$$

De tre sista följer av $\cos 2u = \cos(u+u) = \cos u \cdot \cos u - \sin u \cdot \sin u = \cos^2 u - \sin^2 u$, som med trigonometriska ettan kan skrivas $\cos 2u = \cos^2 u - (1 - \cos^2 u) = 2\cos^2 u - 1$ eller $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 1 - \sin^2 u - \sin^2 u = 1 - 2\sin^2 u$.

3.6.5 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 3b

3.6.1 I vilken kvadrant ligger vinkeln a) $5\pi/4$ b) $500°$ c) $-200°$

d) $1000°$ e) $27\pi/4$ f) $-100\pi/3$ g) $-10000°$?

3.6.2 Bestäm a) $\cos 13\pi$ b) $\sin(-13\pi/2)$ c) $\sin(13\pi/3)$ d) $\cos(13\pi/6)$

e) $\tan(137\pi)$ f) $\tan(137\pi/4)$.

3.6.3 Visa att a) $\boxed{1/\cos^2 v = 1 + \tan^2 v}$ b) $\boxed{1/\sin^2 v = 1 + \cot^2 v}$

3.6.4 Bestäm $\cos v$, om a) $\sin v = 1/3$, (v i första kvadranten)

b) $\sin v = -2/5$, (v i fjärde kvadranten) c) $\sin v = 2/3$

3.6.5 Bestäm $\sin v$, om a) $\cos v = -0,6; \pi/2 < v < \pi$ b) $\cos v = 0,4$

3.6.6 Bestäm $\tan v$ om a) $\sin v = 1/4$, (v i andra kvadranten)

b) $\cos v = 0,3$ (v i fjärde kvadranten) c) $\sin v = -0,5$ d) $\cos v = 2/9$

3.6.7 Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om a) $\tan v = 2, \pi < v < 3\pi/2$

b) $\tan v = -1/3, \pi/2 < v < \pi$ c) $\tan v = -5$ d) $\cot v = -2$.

3.6.8 Bestäm a) $\sin(-\dfrac{\pi}{6})$ b) $\cos(-\dfrac{\pi}{6})$ c) $\sin(-\dfrac{\pi}{3})$ d) $\tan(-\dfrac{\pi}{4})$ e) $\sin\dfrac{3\pi}{4}$
f) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ g) $\sin(\dfrac{7\pi}{6})$ h) $\tan(\dfrac{7\pi}{6})$ i) $\sin(\dfrac{7\pi}{4})$ j) $\cot(\dfrac{11\pi}{6})$.

3.6.9 Solvera en triangel (med beteckningar enligt figur ovan), där a) $a = 7,2,\ b = 4,5$
och $A = 58,3°$ b) $b = 41,6,\ c = 63,5$ och $B = 28,5°$ c) $a = 15,6,\ c = 11,6$
och $C = 31,2°$ d) $a = 20,4,\ b = 5,1$ och $B = 40,1°$.

3.6.10 Solvera en triangel med a) $a = 17,0$ och $b = 8,0$ samt $C = 39,5°$

b) $b = 3,9$ och $c = 8,1$ samt $A = 117,1°$

c) $a = 57,2$ och $c = 16,4$ samt $B = 22,7°$.

3.6.11 Beräkna arean av en triangel med a) $a = 5,0$ och$b = 7,0$ (1.enh.) samt $C = 60°$

b) $a = 4,0$ och $c = 6,0$ samt $B = 40°$ c) $b = c = 3,0$ samt $A = 110°$.

3.6.12 Beräkna exakt a) $\cos 75°$ b) $\tan(5\pi/12)$ c) $\sin 15°$ d) $\cos(\pi/12)$

e) $\sin 105°$ f) $\cos(7\pi/12)$.

3.6.13 Bestäm $\tan(u+v)$, om a) $\tan u = 1/2$ och $\tan v = 1/3$ b) $\tan u = 4$ och $\tan v = -2/3$.

3.6.14 Bestäm $\cos(u+v)$, om a) $\cos u = 1/3,\ \cos v = 1/4$ (u och v i första kvadranten)

b) $\cos u = 0,8,\ \cos v = 0,6$ (u i fjärde och v i första kvadranten)

c) $\cos u = 1/5$ och $\cos v = 2/5$.

3.6.15 Härled liknande formler för $\sin 3u,\ \cos 3u$ och $\tan 3u$.

[*Ledning:* Skriv $3u = u + 2u$].

4 Funktioner

Begreppet funktion har du säkert stött på i gymnasiets kurser i matematik, fysik och kemi. Där lär man sig (förmodligen) att en funktion är en regel för att till ett eller flera tal ordna exakt ett tal. Exempelvis är funktionen $f(x) = x + 2$ den regel som till varje tal x ordnar talet $x + 2$ så att t ex $f(4) = 6$ och $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 2$. Ett annat exempel är funktionen $h(a, b) = a + b + 4$ som till varje talpar (a, b) ordnar talet $a + b + 4$, så att t ex $h(0, 0) = 4$ och $h(4.3, 7.2) = 15.5$. (Notera att de specifika bokstäverna x, a och b är oviktiga, dvs funktionen f i exemplet ovan kan precis lika gärna anges via $f(c) = c^2$ eller via $f(r) = r^2$ etc och h kan lika gärna anges via $h(j, q) = j + q + 4$.)

Vi ska här inte ändra på gymnasiets tolkning av funktionsbegreppet, men vi ska göra det en aning mer allmänt.

4.1 Funktionsbegreppet, grafbegreppet, inverser

4.1.1 Funktionsbegreppet

Den allmänna definitionen av funktionsbegreppet är:

> En funktion f från mängden A till mängden B är en regel som till varje element $a \in A$ ordnar ett entydigt element $f(a) \in B$.

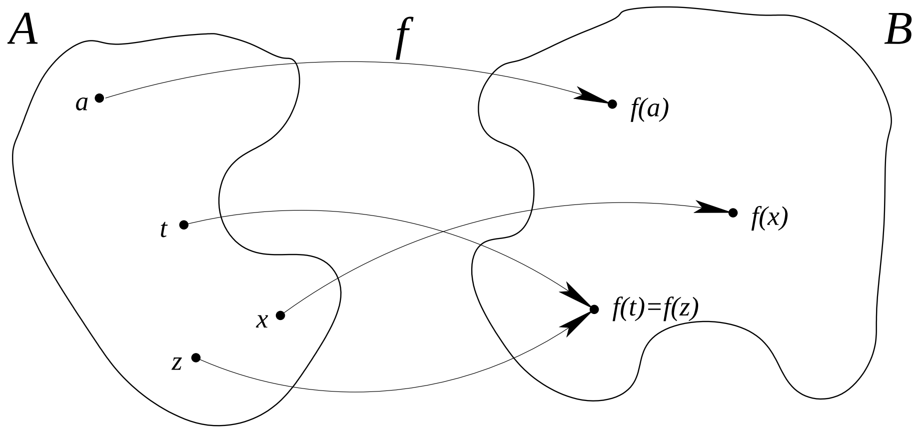
Lite löst sagt: Man stoppar in ett element från A i f och får ut ett element i B. Att f är en funktion från A till B skrivs på symbolisk form som

$$f : A \to B.$$

Om man vill beteckna vad som händer med ett element a kan man skriva

$$a \mapsto f(a)$$

vilket utläses som att "a avbildas på $f(a)$". En illustration till funktionsbegreppet finns i figur 1.



Figur 1: En illustration av funktionsbegreppet: Punkterna a, t, x och z i A avbildas på punkterna $f(a)$, $f(t)$, $f(x)$ respektive $f(z)$ i B.

Mängden A kallas för f's *definitionsmängd* eller *definitionsområde*, medan mängden B kallas för f's *målmängd*. Om C är en delmängd av A sätter man

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\},$$

dvs $f(C)$ är mängden av alla möjliga värden av $f(x)$ om x får väljas fritt i C. Man kallar $f(C)$ för *bilden av* C. Mängden $f(A)$, dvs bilden av hela definitionsmängden, kallas för f's *värdemängd*.

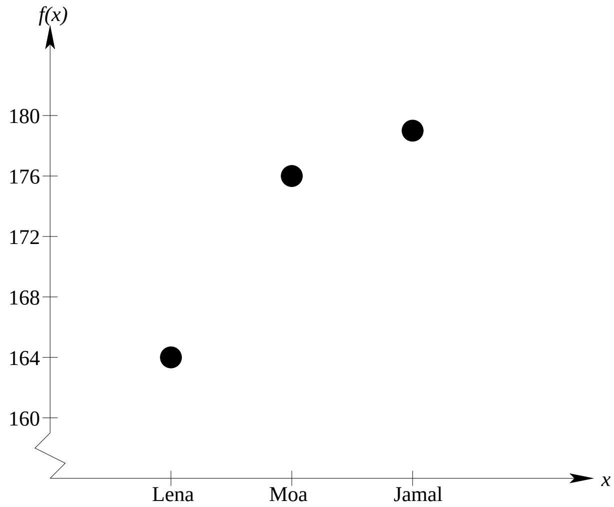
Exempel. Låt A vara mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B vara mängden av Sveriges 290 kommuner. En tänkbar funktion $g : A \to B$ är då att låta $g(x)$ vara den kommun där riksdagledamoten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Detta är en OK definition då varje ledamot är folkbokförd (eller har varit folkbokförd senast) i exakt en svensk kommun. Vi har t ex (i skrivande stund) att g("Maud Olofsson")="Robertsfors". Värdemängden blir alla de kommuner i vilken det finns (eller senast var) en riksdagsledamot folkbokförd.

Däremot är t ex $h : A \to B$ med $h(x)$ den kommun där riksdagledamoten x äger en fastighet **inte** någon funktion, eftersom det inte är så att varje ledamot äger fastighet i exakt 1 kommun (vissa äger ingen och vissa äger i fler än 1 kommun). $\square$

4.1.2 Grafen till en funktion

Ett sätt att illustrera en funktion är att rita dess *graf*. Formellt definieras grafen till en funktion $f : A \to B$ som mängden $\{(x, f(x)) : x \in A\}$. Man bildar alltså alla möjliga par av värden i definitionsmängden och dess funktionsvärde.

Exempel. Låt $A = \{\text{Lena,Moa,Jamal}\}$ och låt funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ ges av att $f(\text{Lena}) = 164$, $f(\text{Moa}) = 176$ och $f(\text{Jamal}) = 179$ (de tre personernas längd i centimeter). Då är $f(A) = \{164, 176, 179\}$. I figur 2 finns f's graf utritad. $\square$



Figur 2: Grafen till funktionen given av Lenas, Moas och Jamals längd.

Exempel. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 1$. Då är $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ medan $g(\mathbb{R}) = [-1, \infty)$. Delar av de båda funktionernas grafer finns i figur 3 $\square$

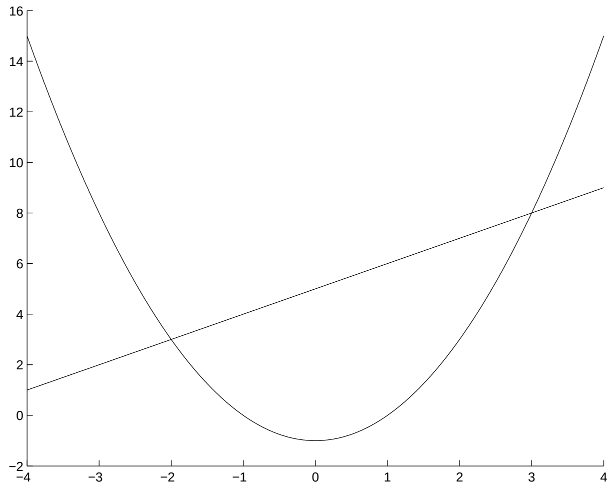
4.1.3 Invers funktion

En viktig egenskap som en funktion kan ha är att olika element alltid avbildas på olika element. Mer precist om $f : A \to B$ så ska det gälla att om $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ och $a_1 \neq a_2$ så är $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funktion med denna egenskap säges vara *injektiv*.

Exempel. Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $h(x) = x^2$ är **inte** injektiv ty t ex är $h(1) = h(-1) = 1$.

Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x + 2$ är injektiv ty funktionens värde växer hela tiden då x ökar så den antar inte samma värde två gånger.

Betrakta funktionen vi hade tidigare i ett exempel där A var mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B var mängden av Sveriges 290 kommuner med



Figur 3: Delar av graferna till funktionerna $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 1$.

$g : A \to B$ där $g(x)$ är den kommun där riksdagledamoten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Denna är garanterat **inte** injektiv, ty det finns fler ledamöter än kommuner så minst en av kommunerna måste ha mer än 1 representant i riksdagen. $\square$

Antag att funktionen $h : A \to B$ är injektiv och vi vet att $h(x) = b$ för något $b \in B$. Eftersom funktionen är injektiv så vet vi att det finns bara ett x som är sådant att $h(x) = b$. Detta kan vi göra för alla b som ligger i värdemängden, $h(A)$. Vi kan alltså definiera en funktion

$$h^{-1} : h(A) \to A \text{ med } h^{-1}(y) = x \text{ om } h(x) = y.$$

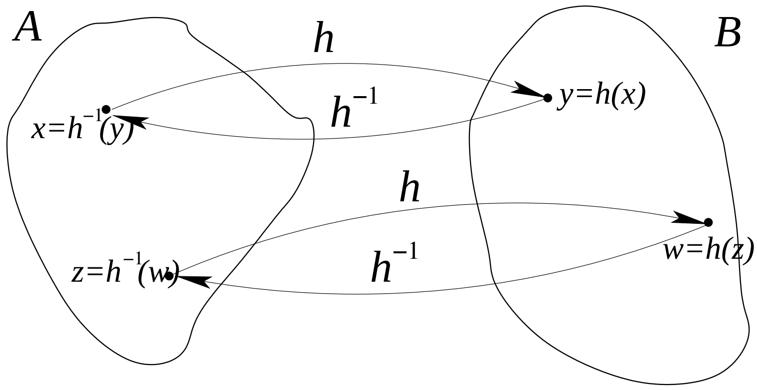
Denna funktion kallas för *inversen* till funktionen h och betecknas som ovan med h^{-1}. Med ord kan man säga att inversen h^{-1} tar funktionsvärdena till h tillbaka till deras ursprung (figur 4 illustrerar).

Observera att det **bara** är injektiva funktioner som har invers. Om $f(x_1) = f(x_2) = y$ med $x_1 \neq x_2$ så kan man ju inte avgöra om en eventuell invers skulle ta y till x_1 eller x_2.

Exempel. Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x + 2$ är injektiv så den har en invers. För att hitta denna sätter vi $y = g(x) = x + 2$ och löser sedan ut x och vi får $x = y - 2 = g^{-1}(y)$ enligt definitionen ovan. Värdemängden av g är alla reella tal så g^{-1} är definierad för alla reella tal så

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ med } g^{-1}(y) = y - 2.$$

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ är inte injektiv så den saknar invers.



Figur 4: Inversen till en funktion.

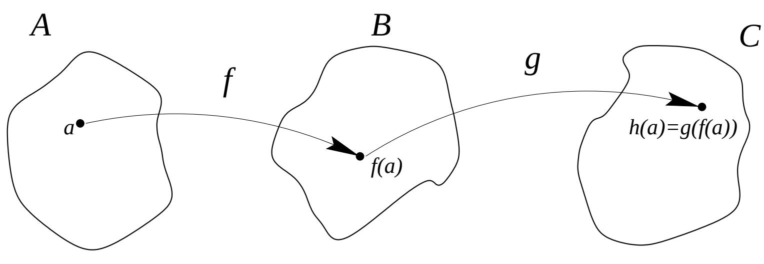
Däremot är $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ med $h(x) = x^2$ injektiv, ty denna växer hela tiden och kommer inte att anta samma värde mer än 1 gång. Likheten $y = h(x) = x^2$ ger $x = \sqrt{y} = h^{-1}(y)$. Detta kan vi göra eftersom $x \geq 0$, så vi kan utesluta lösningen $x = -\sqrt{y}$. $\square$

4.1.4 Sammansättning av funktioner

Antag att f är en funktion från A till B och att g är en funktion från B till någon tredje mängd C, dvs det som "kommer ut" från f går att "stoppa in" i g. Man kan då bilda en ny funktion h från A till C genom att för varje $x \in A$ sätta

$$h(x) = g(f(x)).$$

Funktionen h kallas för *sammansättningen* av f och g och man skriver $h = g \circ f$, dvs man har $g \circ f : A \to C$. Se figur 5.



Figur 5: Den sammansatta funktionen $h = g \circ f$.

Exempel. Betrakta funktionen vi hade tidigare i ett exempel där A var mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B var mängden av Sveriges 290 kommuner med $f : A \to B$ där $f(x)$ är den kommun där riksdagledamöten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Låt $g : B \longrightarrow \mathbb{N}$ vara funktionen som definieras av att $g(y)$ är antalet invånare i kommunen y vid årsskiftet 2007/2008. Vi tittar på sammansättningen $h = g \circ f$. Om man startar med en riksdagsledamot x så är $f(x)$ dennes kommun och $g(f(x))$ denna kommuns invånarantal. Därmed är $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ inget annat än antalet invånare i riksdagsledamoten x:s kommun. $\square$

Det är viktigt att observera att $g \circ f$ och $f \circ g$ i regel är olika saker. Det är ju inte säkert att $f \circ g$ ens existerar bara för att $g \circ f$ existerar; det hänger på om utgången till g passar ihop med ingången till f, dvs om $A = C$. I det allmänna fallet gäller inte detta så det ska snarare betraktas som undantag än regel att även $f \circ g$ existerar. Även om både $f \circ g$ och $g \circ f$ existerar så är de i allmänhet olika.

Exempel. I exemplet ovan med kommuner och riksdagsledamöter är inte $f \circ g$ definierat, ty ut från g kommer det naturliga tal och dessa kan man inte stoppa in i f för f vill ju ha riksdagsledamöter.

Betrakta funktionerna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x + 2$. Här både $f \circ g$ och $g \circ f$ definierade då det hela tiden är reella tal som åker in och ut (och funktionerna tillåter vilka reella tal som helst som invärde). Däremot är de inte lika:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

men

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2.$$

$\square$

Låt f vara en funktion med invers f^{-1} och låt x och y vara sådana att $y = f(x)$ (och därmed är $x = f^{-1}(y)$). Då gäller att

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \text{ och } f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

Alltså gäller att sammansättningarna $f \circ f^{-1}$ och $f^{-1} \circ f$ båda returnerar precis det man stoppar in. En funktion h som bara returnerar det man stoppar in, dvs $h : A \longrightarrow A$ med $h(x) = x$, kallas för *identitetsfunktionen* på A. Med andra ord så är alltså sammansättningarna av en funktion med dess invers alltid identitetsfunktioner för respektive definitionsmängd.

Exempel. Betrakta funktionen $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ med $f(x) = x^2$. Denna har som vi sett tidigare inversen $f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ med $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Om vi sätter samman dem så får vi precis som väntat

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

(ty $x \geq 0$) och

$$f \circ f^{-1}(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

$\square$

4.1.5 Reella funktioner

De funktioner som är viktigast i den här kursen är *reella funktioner*, dvs funktioner som har definitionsmängd och målmängd som är (delmängd till) de reella talen. I resten av avsnitten i det här kapitlet kommer vi att systematiskt gå igenom ett antal olika typer av reella funktioner.

Det finns några egenskaper som är intressanta och specifika för reella funktioner. De vi ska titta på här är växande/avtagande och udda/jämn.

Begreppen växande/avtagande avser hur funktionensvärdena varierar då variabelns värde ökar. Vi har följande definitioner:

Låt A och B vara två delmängder till de reella talen. En funktion $f(x) : A \to B$ säges vara

- *växande* om $f(y) \geq f(x)$ då $y > x$.
- *strängt växande* om $f(y) > f(x)$ då $y > x$.
- *avtagande* om $f(y) \leq f(x)$ då $y > x$.
- *strängt avtagande* om $f(y) < f(x)$ då $y > x$.

En funktion som är strängt växande (avtagande) är per definition automatiskt också växande (avtagande). En funktion som är strängt växande eller strängt avtagande är alltid injektiv, eftersom den hela tiden för växande argument antar nya större (mindre) värden.

Exempel. Vi hade i ett exempel tidigare funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x + 2$. Denna är strängt växande, ty om $x < y$ så är $g(x) = x + 2 < y + 2 = g(y)$.

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ är varken växande eller avtagande, ty t ex har vi $-1 > -2$ och $f(-1) < f(-2)$, men $2 > 1$ och $f(2) > f(1)$. Däremot är den strängt avtagande på intervallet $(-\infty, 0]$ och sedan strängt växande på intervallet $[0, \infty)$. Om vi alltså sätter $f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ och $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ med $f_1(x) = x^2$ och $f_2(x) = x^2$ så är f_1 strängt avtagande och f_2 strängt växande. Det enda vi gjorde var alltså att ändra definitionsmängden. $\square$

Härnäst ska vi införa begreppen udda och jämn funktion som handlar om relationen mellan $f(a)$ och $f(-a)$. Vi har följande definitioner:

Låt A och B vara två delmängder till de reella talen. En funktion $f(x) : A \to B$ säges vara

- *jämn* om $f(x) = f(-x)$ för alla $x \in A$.
- *udda* om $f(x) = -f(-x)$ för alla $x \in A$.

Observera att det krävs att A är symmetrisk, dvs att om $a \in A$ så måste också $(-a) \in A$.

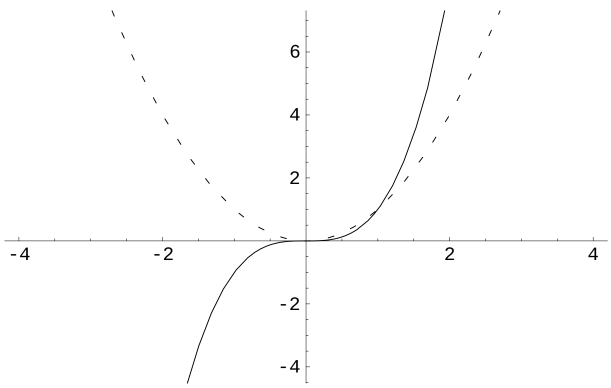
Exempel. I figur 6 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^3$ och $f_2(x) = x^2$. Funktionen $f_1(x)$ är udda eftersom

$$f_1(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f_1(x),$$

och funktionen $f_2(x)$ är jämn eftersom

$$f_2(x) = (-x)^2 = x^2 = f_2(x).$$

Geometriskt för grafen så betyder jämn att grafen ser likadan ut om den speglas i y-axeln och udda betyder att grafen ser likadan ut om den speglas i origo.



Figur 6: Centrala delen av grafen av $f_1(x) = x^3$ (heldragen) och $f_2(x) = x^2$ (streckad).

$\square$

4.1.6 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 4a

4.1.1 Avgör om följande reella funktioner är (strängt) avtagande, (strängt) växande, injektiva, respektive udda eller jämna. Om funktionen är injektiv så bestäm inversen.

a) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a(x) = x$
b) $b : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ b(x) = \frac{1}{x^2}$
c) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c(x) = x^2 + 2x$
d) $d : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R},\ d(x) = x^2 + 1$
e) $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ e(x) = x^3 + 1$

4.1.2 Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara två reella funktioner givna av $f(x) = x^2 - 1$ och $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Bestäm sammansättningarna $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ och $g \circ g$.

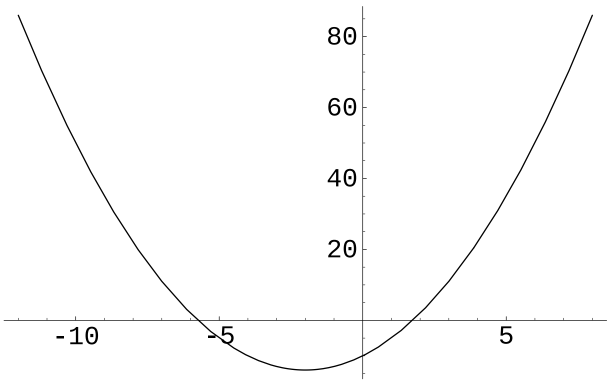
4.2 Polynom

Ett viktigt exempel på funktioner är *polynom(funktioner)*. Vi har tidigare tittat på polynom och ett polynom

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

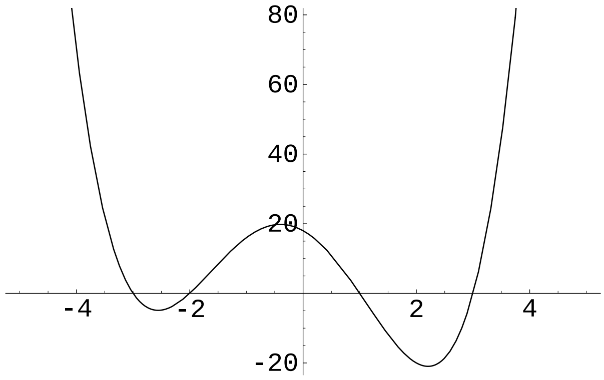
kan man se som en funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Med andra ord så kan man alltid sätta in vilket reellt tal som helst och ut kommer ett reellt tal.

Exempel. Andragradspolynomet $f(x) = x^2 + 4x - 10$ kan vi kvadratkomplettera och vi får $f(x) = (x + 2)^2 - 14$. Från en kvadratkomplettering kan man sedan läsa ut det mesta man kan tänkas vilja veta om polynomet som funktion. Nollställena blir $x_1 = -2+\sqrt{14}$ och $x_2 = -2-\sqrt{14}$. Det minsta värdet som funktionen antar är då $x+2 = 0$ dvs $x = -2$ (eftersom $(x+2)^2 \geq 0$) och värdet är då $f(-2) = -14$. När x blir mycket stort eller mycket negativt så växer funktionen obegränsat och kommer därmed att anta alla värden som är större än eller lika med -14. Värdemängden till funktionen är alltså alla reella tal ifrån -14 och uppåt, dvs intervallet $[-14, \infty)$. Centrala delen av grafen finns i figur 7. Man ser de två nollställena, minimumet och att när x blir stort eller litet så tycks den försvinna uppåt.



Figur 7: Centrala delen av grafen av andragradspolynomet $f(x) = x^2 + 4x - 10$ $\square$

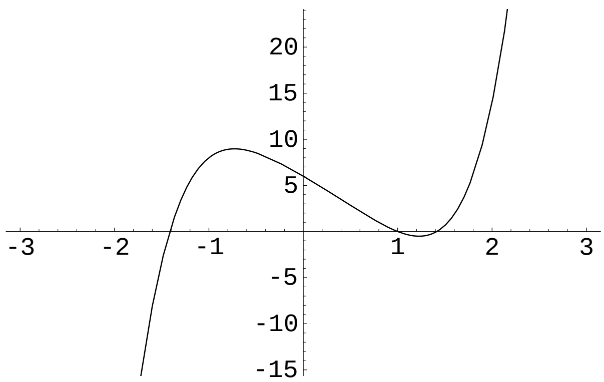
Exempel. Vi tar en titt på polynomet $f(x) = (x-3)(x+3)(x-1)(x+2) = x^4+x^3-11x^2-9x+18$ som är av grad 4 och har fyra stycken olika (reella) nollställen. Centrala delen av grafen finns i figur 4.2. Man ser de fyra nollställena och när x blir stort eller litet så tycks den försvinna uppåt. För värden som är mycket positiva eller mycket negativa är det alltid den term med högst potens som dominerar. I det här fallet är det x^4 som dominerar och denna har positiv koefficient (1) och *jämn* grad vilket gör att funktionen går mot oändligheten i båda ändarna. Värdemängden till funktionen är alla reella tal ifrån ca -21 (minimumet nära $x = 2$) och uppåt.



Figur 8: Centrala delen av grafen av fjärdegradspolynomet
$f(x) = (x-3)(x+3)(x-1)(x+2) = x^4+x^3-11x^2-9x+18$

$\square$

Exempel. Vi tittar nu på polynomet $f(x) = (x^2+3)(x-1)(x^2-2) = 6-6x-x^2+x^3-x^4+x^5$ som är av grad 5 och har tre stycken olika (reella) nollställen (vilka?). Centrala delen av grafen finns i figur 4.2. Man ser de tre nollställena och när



Figur 9: Centrala delen av grafen av femtegradspolynomet
$f(x) = (x^2+3)(x-1)(x^2-2) = 6-6x-x^2+x^3-x^4+x^5$

x blir stort försvinner den uppåt och när x blir litet försvinner den nedåt. Det är x^5 som dominerar och denna har positiv koefficient (1) och *udda* grad vilket gör att funktionen går mot minus oändligheten respektive oändligheten. Värdemängden till funktionen är alla reella tal. $\square$

4.2.1 Övningar

4.2.1 Skissa grafen till följande polynomfunktioner av grad två samt ange rötter och värdemängd. **Tips:** Bestäm först eventuellt maximum eller minimum samt rötter med hjälp av kvadratkomplettering.

a) $p(x) = x^2 + 2x - 7$ b) $p(x) = x^2 + 3x + 6$

c) $p(x) = 5 - 4x - x^2$

4.2.2 Skissa grafen till följande polynomfunktioner. Ange nollställen och bestäm vad som händer när x går mot (plus eller minus) oändligheten.

a) $p(x) = (x^2 - 5)(x - 1) = 5 - 5x - x^2 + x^3$

b) $p(x) = (x^2 + 5)(x - 1) = -5 + 5x - x^2 + x^3$

c) $p(x) = (x^2 - 5)(x^2 - 1) = 5 - 6x^2 + x^4$

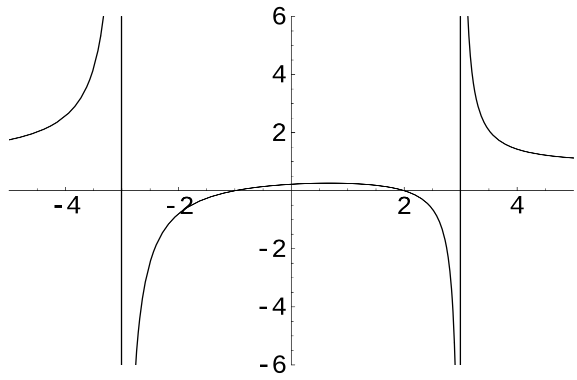
4.3 Rationella funktioner

Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två polynom. Vi kan då bilda det rationella uttrycket $h(x) = f(x)/g(x)$. Då får man vad som kallas för en *rationell funktion* $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Här måste man vara lite försiktig, ty kvoten $h(x) = f(x)/g(x)$ är bara definierad för alla x sådana att $g(x) \neq 0$. Maximal definitionsmängd blir alltså $A = \{x : g(x) \neq 0\}$.

Observera att en rationell funktion $h(x) = f(x)/g(x)$ har ett nollställe i $x = a$ om och endast om $f(a) = 0$ och $g(a) \neq 0$.

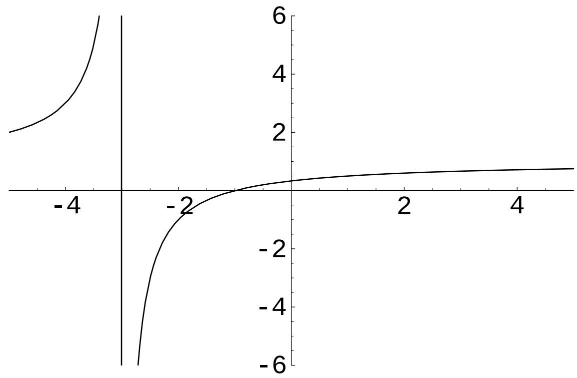
Exempel. Den rationella funktionen $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ med $h(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2 - 9}$ har nollställen i 2 och -1 och som maximal definitionsmängd $A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 9) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, dvs alla reella tal utom -3 och 3. Centrala delen av grafen finns i figur 10. Observera att funktionen brakar iväg mot $-\infty$ respektive ∞ på de två sidorna om de två ställen där den inte är definierad. När x närmar sig $-\infty$ och ∞ så närmar sig funktionen 1, men mer om detta när vi kommer till avsnittet om gränsvärden. $\square$

Exempel. Den rationella funktionen $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ med $h(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{x^2 - 9}$ är inte definierad i $x = 3$, men genom att förkorta med faktorn $(x - 3)$ så får vi en rationell funktion $r(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ som är lika med $h(x)$ överallt där $h(x)$ är definierad och också



Figur 10: Centrala delen av grafen av den rationella funktionen $h(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2-9}$

definierad i $x = 3$. Denna rationella funktion har som maximal definitionsmängd $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ och som enda nollställe $x = -1$. Centrala delen av grafen finns i figur 11.



Figur 11: Centrala delen av grafen av den rationella funktionen $r(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$

$\square$

4.3.1 Övningar

4.3.1 Bestäm största möjliga definitionsmängd och alla nollställen till följande rationella funktioner. Försök gärna också göra en skiss av hur grafen ser ut.
a) $\dfrac{x-1}{x+2}$ b) $\dfrac{x-3}{x^2+2}$ c) $\dfrac{x^2-3}{x+2}$ d) $\dfrac{x^2+4}{x^2-2}$

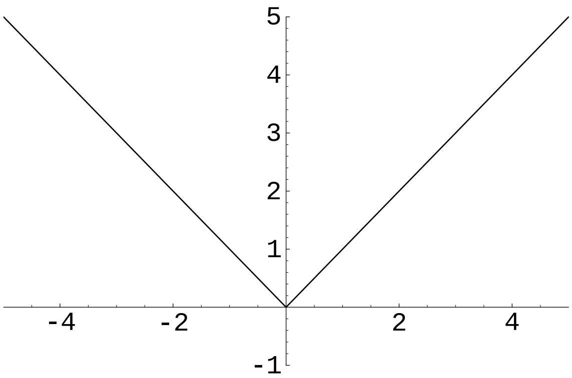
4.4 Absolutbeloppet

Absolutbeloppet har vi definierat tidigare och man kan se det som en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ där

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Observera här att det är två olika “formler” för absolutbeloppet beroende på om argumentet x är positivt eller negativt. Detta betyder att man när man arbetar med absolutbeloppet i regel delar upp i olika fall för två eller flera intervall.

Exempel. Den centrala delen av grafen till absolutbeloppsfunktionen finns i figur 12. Grafen består av två olika halvlinjer som möts i origo. Funktionen har ett enda nollställe nämligen $x = 0$ och går mot ∞ när x går mot $-\infty$ och ∞.



Figur 12: Centrala delen av grafen av absolutbeloppsfunktionen $f(x) = |x|$

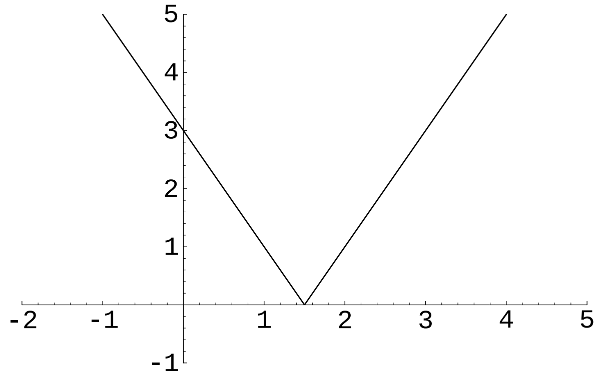
$\square$

När man sätter samman absolutbeloppsfunktionen med andra funktioner så blir det som väntat en aning mer komplicerat. Men det finns en allmän strategi att följa. Det gäller att dela upp i olika intervall beroende på när det som man tar absolutbeloppet av är positivt eller negativt. Vi illustrerar strategin med ett par exempel när man sätter samman absolutbeloppet med polynom.

Exempel. Vi tar en titt på den sammansatta funktionen $f(x) = |2x - 3|$. Polynomet $2x - 3$ har ett enda nollställe i $x = \frac{3}{2}$ och är positivt för alla $x > \frac{3}{2}$ och negativt för alla $x < \frac{3}{2}$. Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{om } x \geq \frac{3}{2}, \\ -(2x - 3) & \text{om } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Grafen, som finns i figur 13, består alltså av två olika halvlinjer som möts i punkten $(\frac{3}{2}, 0)$.



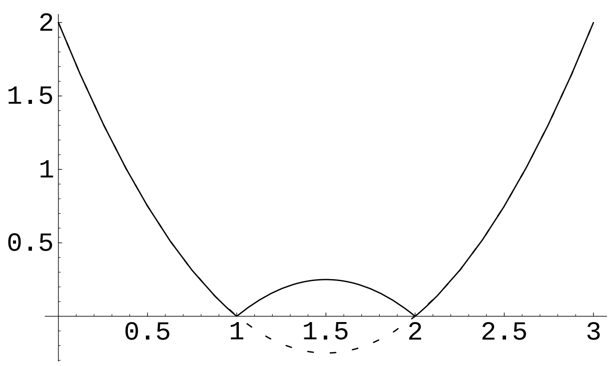
Figur 13: Centrala delen av grafen av $f(x) = |2x - 3|$

□

Exempel. Vi testar nu att sätta samman absolutbeloppet med ett andragradspolynom: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Polynomet $x^2 - 3x + 2$ har två nollställen i $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$. Det är positivt för alla $x > 2$ och alla $x < 1$ samt negativt för alla x mellan nollställena, dvs $1 < x < 2$. Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{om } x \leq 1 \text{ eller } x \geq 2, \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{om } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Grafen, som finns i figur 14, består alltså av tre olika segment av andragradskurvor. Den streckade kurvan är vad man fått om man tagit bort absolutbeloppet. Det blir helt enkelt en spegling av kurvan i x-axeln.



Figur 14: Centrala delen av grafen av $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

□

Exempel. I det här exemplet ska vi se hur man angriper en funktion som innehåller mer än en del med absolutbelopp. Låt

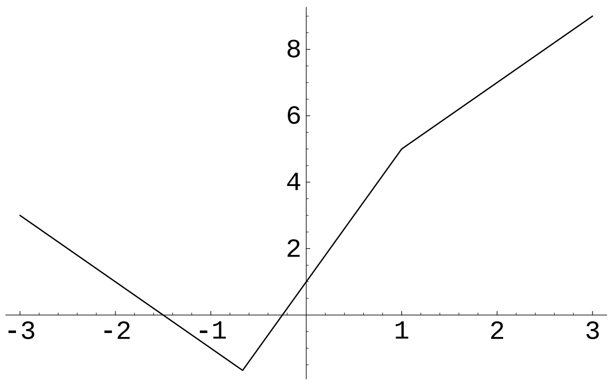
$$f(x) = |3x + 2| - |x - 1|\,.$$

Polynomet $3x + 2$ har ett enda nollställe i $x = -\frac{2}{3}$ och är positivt för alla $x > -\frac{2}{3}$ och negativt för alla $x < -\frac{2}{3}$. Polynomet $x - 1$ har ett enda nollställe i $x = 1$ och är positivt för alla $x > 1$ och negativt för alla $x < 1$. Det betyder att vi får två brytpunkter. När $x > 1$ så är båda argumenten för absolutbeloppet positiva, när $x < -\frac{2}{3}$ så är båda negativa och mellan dessa brytpunkter är $3x + 2$ positivt och $x - 1$ negativt.

Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} (3x+2) - (x-1) = 2x + 3 & \text{om } x \geq 1, \\ (3x+2) - (-(x-1)) = 4x + 1 & \text{om } -\frac{2}{3} \leq x < 1, \\ -(3x+2) - (-(x-1)) = -2x - 3 & \text{om } x \leq -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Grafen, som finns i figur 15, består alltså av tre olika delar av linjer som möts i punkterna $(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$ och $(1, 5)$.



Figur 15: Centrala delen av grafen av $f(x) = |3x + 2| - |x - 1|$

$\square$

4.4.1 Övningar

4.4.1 Dela upp i lämpliga intevall och ange funktionerna i vart och ett av dessa intervall utan absolutbelopp. Skissa funktionernas grafer.

a) $|x + 2|$
b) $|5x - 2|$
c) $|x^2 - 4|$
d) $|2x - 2| + |2x + 1|$

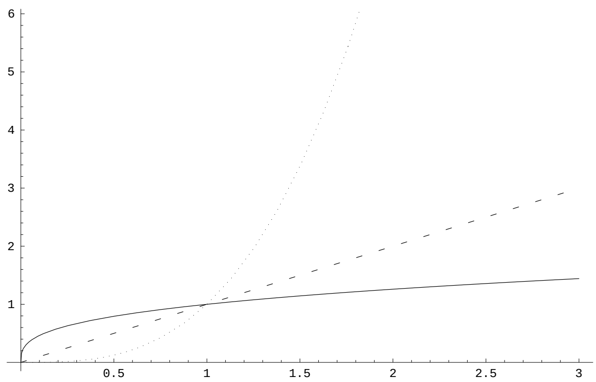
4.5 Potensfunktioner

Vi har i avsnitt 1.8 definierat potens med rationell exponent $b^{\frac{m}{n}}$ för $b \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Detta ger att vi för ett rationellt tal $\frac{m}{n}$ kan definiera en *potensfunktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ genom } f(x) = x^{\frac{m}{n}}.$$

En första sak att notera är att $f(1) = 1^{\frac{m}{n}} = 1$ för alla potensfunktioner.

Exempel. Vi tittar först på tre exempel då potensen är positiv. I figur 16 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f_2(x) = x$ och $f_3(x) = x^3$. Vi observerar som vi redan påpekat att kurvorna skär varandra i punkten $(1, 1)$. Alla närmar sig 0 då x närmar sig 0 och alla kommer gå mot ∞ när x går mot ∞. Vi ser att när $x > 1$ så är $f_3(x) = x^3$ störst och när $x < 1$ så är $f_3(x) = x^{\frac{1}{3}}$ störst. I allmänhet är det så att en större potens är störst då $x > 1$ och en mindre potens är störst då $x < 1$.



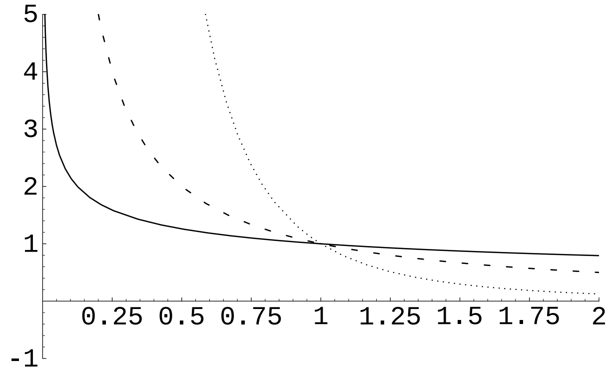
Figur 16: Början av grafen av $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (heldragen), $f_2(x) = x$ (streckad) och $f_3(x) = x^3$ (prickad).

$\square$

Exempel. Vad händer när vi tar en negativ exponent? Tänk på att $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. I figur 17 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $f_2(x) = x^{-1} = 1/x$ och $f_3(x) = x^{-3}$. Vi noterar återigen att kurvorna skär varandra i punkten $(1, 1)$. Alla närmar sig ∞ då x går mot 0 och alla kommer gå mot 0 när x går mot ∞. Vi ser att när $x > 1$ så är $f_3(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ störst och när $x < 1$ så är $f_3(x) = x^{-3}$ störst. I allmänhet är det precis som för positiva potenser så att en större potens är störst då $x > 1$ och en mindre potens är störst då $x < 1$.

$\square$

När vi har en positiv heltalspotens, som 1 respektive 3 i det första exemplet, så är ju potensfunktionen i själva verket också ett polynom. Då kan man förstås definiera



Figur 17: Början av grafen av $f_1(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ (heldragen), $f_2(x) = x^{-1}$ (streckad) och $f_3(x) = x^{-3}(prickad)$.

funktionen för alla tal, inte bara de positiva. Om potensen är positiv så kan man alltid definiera funktionen också för $x = 0$. Dessutom om potensen är $1/n$ där n är udda heltal så existerar $x^{\frac{1}{n}}$ också för negativa tal x, så man kan också definiera potensfunktionen $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ för alla reella tal. Däremot finns t ex inte $x^{\frac{1}{2}}$ för negativa värden på x.

Observera till slut att alla potensfunktioner är antingen strängt växande (om potensen är positiv) eller strängt avtagande (om potensen är negativ) på $\mathbb{R}_+$ och att värdemängden också är $\mathbb{R}_+$ i samtliga fall . Därmed har en potensfunktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ en invers $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Potensreglerna ger att om $f(x) = x^r$ och $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$ så gäller att

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{r}}) = (x^{\frac{1}{r}})^r = x^{\frac{1}{r} \cdot r} = x$$

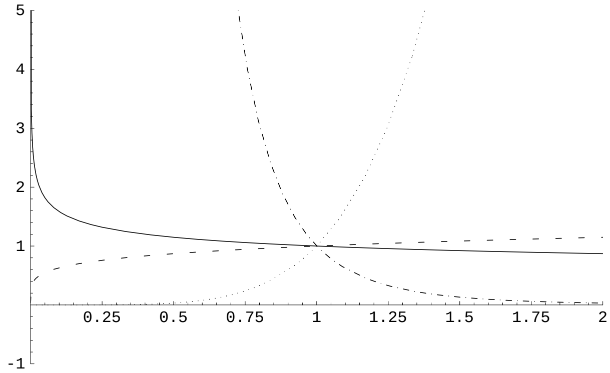
och

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^r) = (x^r)^{\frac{1}{r}} = x^{r \cdot \frac{1}{r}} = x.$$

Alltså är $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$ invers till $f(x) = x^r$.

4.5.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 4b

4.5.1 I figur 18 finns delar av grafen till de fyra potensfunktionerna $f_1(x) = x^{-\frac{1}{5}}$, $f_2(x) = x^5$, $f_3(x) = x^{-5}$ och $f_4(x) = x^{\frac{1}{5}}$. Ange vilken som är vilken, inversen till respektive funktion samt ange maximal definitionsmängd för de fyra funktionerna.



Figur 18: Början av grafen av $f_1(x) = x^{-\frac{1}{5}}$, $f_2(x) = x^5$, $f_3(x) = x^{-5}$ och $f_4(x) = x^{\frac{1}{5}}$.

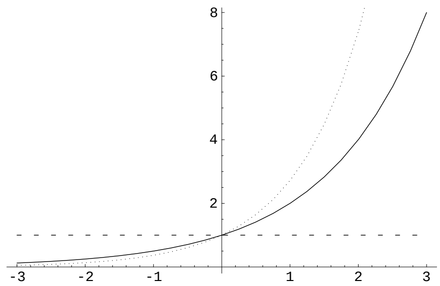
4.6 Exponentialfunktioner, logaritmer

4.6.1 Exponentialfunktioner

Istället för att som för potensfunktioner låta basen b variera i en potens, b^r, så kan man låta exponenten r variera. Man får då en *exponentialfunktion*, $f(x) = b^x$, där b är en positiv konstant. En exponentialfunktion är definierad för alla reella tal och värdena är alltid positiva tal. Vi observerar att $f(0) = b^0 = 1$ oavsett vad b är , så grafen till en exponentialfunktion går alltid genom punkten $(0, 1)$.

Det finns en exponentialfunktion som är viktigare än alla andra nämligen den då basen ges av det tal som betecknas med bokstaven e. Detta tal har (precis som t ex π) en oändlig decimalutveckling som inte är periodisk och början av denna ser ut så här:

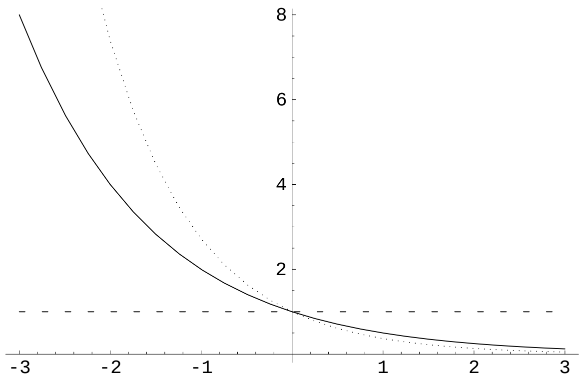
$$e \approx 2.718281828459045235360287471352.$$



Figur 19: Centrala delen av grafen av $f_1(x) = 2^x$ (heldragen), $f_2(x) = 1^x = 1$ (streckad) och $f_3(x) = e^x$ (prickad).

Exempel. I figur 19 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 1^x = 1$ och $f_3(x) = e^x$. Vi observerar som vi redan påpekat att kurvorna skär varandra i punkten $(0,1)$. När basen är 1 så blir (förstås) funktionen konstant hela tiden. Med basen 2 eller e så växer funktionen mot ∞ när x går mot ∞ och går mot 0 när x går mot $-\infty$. Detta gäller allmänt när basen är större än 1. (Om man multiplicerar två tal båda större än 1 så får man en produkt som är större än båda faktorerna.) I detta fall blir alltså funktionen strängt växande. $\square$

Exempel. I figur 20 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = (1/2)^x$, $f_2(x) = 1^x = 1$ och $f_3(x) = (1/e)^x$. Återigen observerar vi att kurvorna skär varandra i punk-



Figur 20: Centrala delen av grafen av $f_1(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$ (heldragen), $f_2(x) = 1^x = 1$ (streckad) och $f_3(x) = (1/e)^x = e^{-x}$ (prickad).

ten $(0,1)$. Med basen $1/2$ eller $1/e$ så avtar funktionen mot 0 när x går mot ∞ och går mot ∞ när x går mot $-\infty$. Detta gäller allmänt när basen är mindre än 1. (Om man multiplicerar två tal båda mindre än 1 så får man en produkt som är mindre än båda faktorerna.) I detta fall blir alltså funktionen strängt avtagande. $\square$

Observera att dessa grafer är spegelbilder i y-axeln till de i figur 19. Detta förklaras av att $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ (respektive $\frac{1}{e} = e^{-1}$), så $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ (respektive $\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$) för alla reella tal x.

Anmärkning Vi har tidigare bara definierat potensen b^x om x är ett rationellt tal, men det går bra att utvidga denna också till alla reella tal. Man gör detta genom att betrakta b^{r_n}, där r_n är rationella tal som bättre och bättre approximerar ett reellt tal x. Om man t ex låter r_n vara approximationen av x med n decimaler (detta är rationella tal) så är b^x gränsvärdet av b^{r_n} då n går mot oändligheten. Mer om detta kommer i del 2 av kursen.

Vi sammanfattar våra observationer angående exponentialfunktionen $f(x) = b^x$:

- Basen b måste vara positiv
- Definitionsmängd är $\mathbb{R}$
- Värdemängd är $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (om $b \neq 1$)
- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$
- Om $b > 1$ så är $f(x)$ strängt växande
- Om $0 < b < 1$ så är $f(x)$ strängt avtagande
- Om $b = 1$ så är $f(x) = 1$

4.6.2 Logaritmfunktioner

Eftersom en exponentialfunktion $f(x) = b^x$ (med $b \neq 1$ och $b > 0$) antingen var strängt växande ($b > 1$) eller strängt avtagande ($0 < b < 1$) så betyder det att dessa har en invers funktion (se avsnitt 4.1.5). Inversen till en exponentialfunktion kallas för en *logaritmfunktion*. Värdemängden för en exponetialfunktion (med $b \neq 1$) är alla positiva reella tal, så definitionsmängden för en logaritmfunktion blir alltså alla positiva reella tal.

Låt $y = f(x) = b^x$. Från definitionen av invers funktion får vi att $f^{-1}(y) = x$ där $y = f(x) = b^x$. För en allmän bas b betecknar man denna funktion med $f^{-1} = \log_b$. Vi får alltså att

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \log_b(y) = x, \ \text{där } x \text{ är det tal som uppfyller } y = b^x.$$

I allmänhet finns det inget enkelt sätt att för hand räkna ut värdet av en logaritmfunktion. Det finns dock ett värde som alltid är enkelt att räkna ut:

$$\log_b(1) = \log_b(b^0) = 0.$$

Exempel. Vi testar att räkna ut logaritmen med bas 2 i några enkla exempel då det går att räkna ut den exakt. I det fallet har vi att $\log_2(y) = x$ om $y = 2^x$. Det gäller alltså att skriva argumentet som en potens av 2.

$$\begin{aligned}
\log_2(1) &= \log_2(2^0) = 0 \\
\log_2(2) &= \log_2(2^1) = 1 \\
\log_2(1024) &= \log_2(2^{10}) = 10 \\
\log_2(\sqrt{2}) &= \log_2(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Däremot finns det inget enkelt sätt att t ex räkna ut $\log_2(3)$ då inte 3 är någon jämn och fin potens av 2. $\square$

Det finns två logaritmfunktioner som är så vanliga att de fått egna beteckningar. Det är dels den *naturliga logaritmen* som har basen e och dels 10-logaritmen som har 10 som bas. Dessa betecknas i regel med (det finns exempel i litteraturen med andra beteckningar)

$$\log_e(x) = \ln(x) \text{ respektive } \log_{10}(x) = \lg(x).$$

Exempel. För dessa speciella logaritmfunktioner har vi t ex

$$\begin{aligned}
\lg(10) &= \lg(10^1) = 1 \\
\lg(0.01) &= \lg(10^{-2}) = -2 \\
\ln(e) &= \ln(e^1) = 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Det är en allmänt vedertagen konvention att inte skriva ut parentesen för argumentet för en logaritmfunktion. Man skriver alltså bara $\ln x$ istället för $\ln(x)$ etc och hädanefter kommer vi att göra så överallt där det inte kan leda till missförstånd.

Det finns ju som bekant ett antal användbara regler för potenser. Dessa leder i sin turtill några nyttiga räkneregler för logaritmer. Vi vet ju att $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$. Detta kan vi utnyttja för att visa en räkneregel för $\log_b xy$. Om vi antar att $x > 0$ och $y > 0$ så får vi

$$b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y} = x \cdot y = b^{\log_b xy}.$$

Eftersom b^x är injektiv (den är antingen strängt växande eller strängt avtagande) så är $b^s = b^t$ bara om $s = t$. Därmed måste det gälla att

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y.$$

På samma sätt får vi genom att utnyttja att $b^{xy} = (b^x)^y$ att

$$b^{-\log_b x} = b^{(\log_b x)(-1)} = (b^{\log_b x})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x} = b^{\log_b \frac{1}{x}}.$$

Precis som ovan får vi att

$$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x.$$

Genom att sätta samman respektive upprepa dessa två regler så kan man få regler för logaritmen av kvot respektive potens. Vi sammanfattar de regler för logaritmfunktioner som vi kommit fram till.

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ om $x, y > 0$
- $\log_b \frac{1}{y} = -\log_b y$
- $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ om $x, y > 0$
- $\log_b x^n = n \log_b x$ om $x > 0$

Observera att det **inte** finns några regler för $\log_b(x + y)$ eller $\log_b(x - y)$.

Exempel. Förenkla uttrycket $\lg 700 - \lg \frac{7}{10}$ så långt det går.

Lösning. Vi utnyttjar reglerna för logaritm av produkt och kvot och får

$$\begin{aligned} \lg 700 - \lg \frac{7}{10} &= \lg(7 \cdot 100) - (\lg 7 - \lg 10) \\ &= \lg 7 + \lg 100 - \lg 7 + \lg 10 = \lg 10^2 + \lg 10^1 = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

□

4.6.3 Övningar

4.6.1 Vilka av följande räkneregler gäller för en exponentialfunktion $f(x) = b^x$?

I de fall som det inte är en giltig regel så ge ett exempel då det inte stämmer.

a) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

b) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

c) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

d) $f(x - y) = f(x) - f(y)$

e) $f(x - y) = f(x)/f(y)$

f) $f(x/y) = f(x)/f(y)$

4.6.2 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a) $\lg 1000$ b) $\lg 0,01$ c) $10^{\lg 4}$

d) $10^{\lg 0.7}$ e) $10^{-\lg 4}$ f) $10^{-\lg 0.5}$

4.6.3 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a) $\ln e^2$ b) $\ln \sqrt{e}$ c) $\ln \frac{1}{e}$

d) $\ln \left(\frac{1}{e}\right)^2$ e) $e^{\ln 7}$ f) $e^{-\ln 3}$

4.6.4 Lös ekvationerna.

a) $\ln x = 0$ b) $\lg x = 1$ c) $\ln x = 2$

d) $\lg x = -4$ e) $2 \cdot \lg x = 3$

4.6.5 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a) $\lg 30 - \lg 0.3$ b) $2 \ln 8 - 3 \ln 4 + 20 \ln 1$

c) $3 \ln 2 + 2 \ln 3 - 4 \ln \sqrt{6}$

4.7 Trigonometriska funktioner

4.7.1 Trigonometriska funktioner

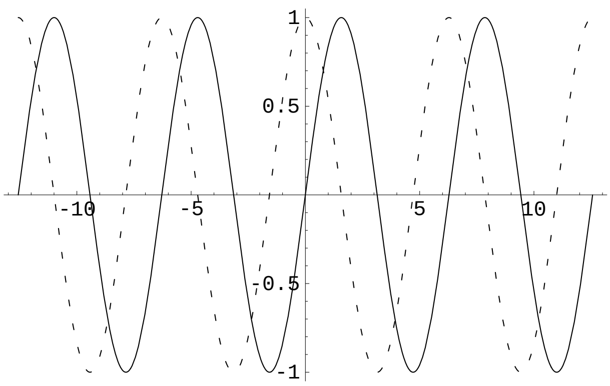
Vi har redan definierat de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus etc med hjälp av trianglar och enhetscirkeln. Trigonometriska funktioner används dock till flera olika saker och kopplingen till geometri är inte alltid helt uppenbar. Det är därför viktigt att känna till de grundläggande egenskaperna som dessa har om man ser dem som reella funktioner.

Vi påminner om att vi definierade funktionerna för alla reella tal med hjälp av enhetscirkeln. Undantag var att tangens och cotangens inte var definierade då cosinus respektive sinus var 0. Sinus och cosinus ger värden vars belopp är högst 1 medan tangens och cotangens kan ge alla möjliga reella tal. Vi har alltså följande reella funktioner:

$$
\begin{aligned}
\sin &: \mathbb{R} \to [-1,1] \\
\cos &: \mathbb{R} \to [-1,1] \\
\tan &: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \text{ ett heltal}\} \to \mathbb{R} \\
\cot &: \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \text{ ett heltal}\} \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Här betyder $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \text{ ett heltal}\}$ alla reella tal utom de som är på formen $k\pi$ med k ett heltal. Observera att vi angivit respektive funktions värdemängd som målmängd. Man skulle lika gärna kunnat ange alla de reella talen som målmängd också för sinus och cosinus.

När vi utgick ifrån enhetscirkeln så tänkte vi oss att en punkt på cirkeln kan representeras av (oändligt många) olika vinklar som skiljer sig åt av ett helt antal varv, dvs en multipel av 2π radianer. T ex så representerar vinklarna $\pi/2$, $\pi/2 + 2\pi$ och $\pi/2 - 2\pi$ alla punkten $(0, 1)$. Detta betyder att funktionerna blir *periodiska* med perioden 2π, dvs att $f(x + 2\pi) = f(x)$. I figur 21 finns grafen till sinus- och cosinusfunktionen och man ser tydligt det periodiska beteendet. Vi såg också i enhetscirkeln att det fanns andra likheter för olika värden på vinkeln. För sinus hade vi t ex att $\sin(\pi - x) = \sin x$ och att $\sin(-x) = -\sin x$, dvs att sinus är en udda funktion.

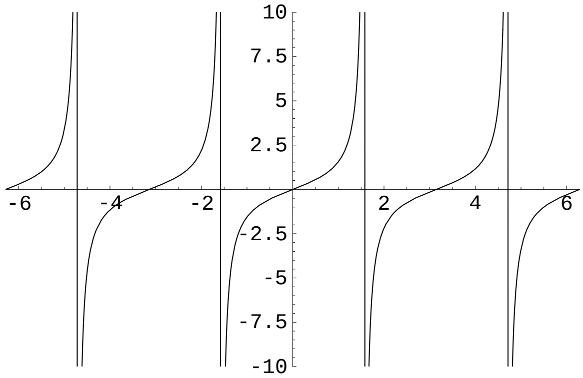


Figur 21: Delar av grafen till $\sin x$ (heldragen) och $\cos x$ (streckad).

Vi sammanfattar några av de viktigaste egenskaperna för de trigonometriska funktionerna i följande tabell.

$\sin(x+2\pi) = \sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$ (udda)
$\cos(x+2\pi) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$ (jämn)
$\tan(x+\pi) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$ (udda)	
$\cot(x+\pi) = \cot x$	$\cot(-x) = -\cot x$ (udda)	
$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$	

Du ska kunna tolka dessa likheter geometriskt, dels i enhetscirkeln och dels på funktionsgrafen. Observera speciellt att perioden för tangens och cotangens är π vilket man kan skönja i figur 22.



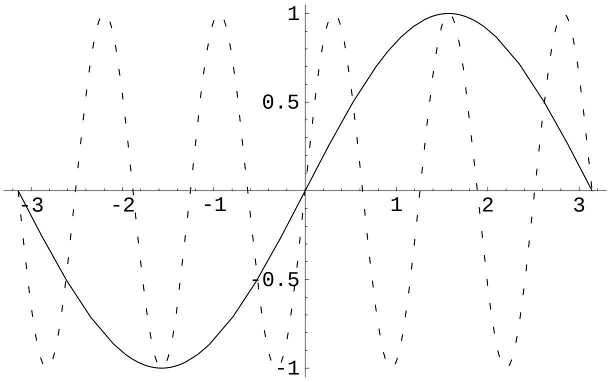
Figur 22: Delar av grafen till $\tan x$.

En viktig sak att tänka på är att när man sätter samman en trigonometrisk funktion med en annan funktion så ändras bl a perioden.

Exempel. I figur 23 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = \sin x$ och $f_2(x) = \sin(5x)$. Vi observerar att f_2 svänger mycket snabbare. Vi får att

$$f_2(x) = \sin(5x) = \sin(5x + 2\pi) = \sin(5(x + \frac{2\pi}{5})) = f_2(x + \frac{2\pi}{5}),$$

så perioden för denna blir $\frac{2\pi}{5}$. Allmänt så kan vi på samma sätt visa att $\sin kx$ har perioden $\frac{2\pi}{k}$. $\square$



Figur 23: Delar av grafen av $f_1(x) = \sin x$ (heldragen) och $f_2(x) = \sin 5x$ (streckad).

4.7.2 Inversa trigonometriska funktioner

De trigonometriska funktionerna är ju praktexempel på funktioner som **inte** är injektiva, då de ju antar samma värden oändligt många gånger (se avsnitt 4.1). Därmed har de ju inga inverser. Vad man kan göra är samma trick som vi använde t ex då vi observerade att kvadratroten var invers till funktionen $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ med $f(x) = x^2$. Vi minskar definitionsmängden så att funktionen blir injektiv på detta mindre intervall.

Exempel. I figur 21 ser vi att sinusfunktionen har $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ och är strängt växande till $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. (Detta inser man också om man tittar på definitionen av sinus i enhetscirkeln.) Om man alltså definierar en funktion

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1], \text{ med } f(x) = \sin x,$$

så kommer denna att vara strängt växande och alltså injektiv. Alltså har den en invers

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ med } f^{-1}(y) = x \text{ där } y = \sin x.$$

Med andra ord så svarar denna inversa funktion $f^{-1}(y)$ på frågan: Vilken vinkel x i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ har $\sin x = y$?

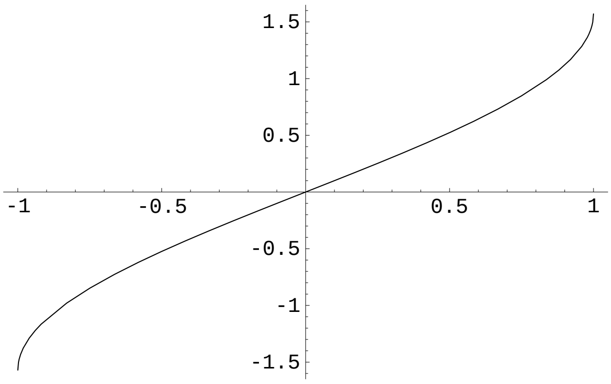
Vi har t ex att $f^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$, eftersom $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (och $\frac{\pi}{4}$ ligger i rätt intervall). $\square$

Motsvarande konstruktion som vi gjorde för sinusfunktionen i exemplet kan man göra för samtliga trigonometriska funktioner genom att välja lämpliga intervall. Funktionerna man får kallas för de inversa trigonometriska funktionerna och heter *arcus sinus*, *arcus cosinus* etc. Ordet *arcus* betyder båge, och funktionerna anger båglängden (dvs vinkeln mätt i radianer) som motsvarar värdet av sinusfunktionen (respektive cosinus etc). Vi sammanfattar i följande tabell:

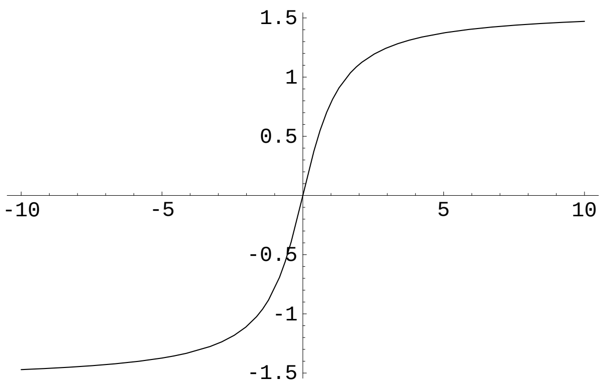
- Sinus på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ har invers $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Cosinus på $[0, \pi]$ har invers $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
- Tangens på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ har invers $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- Cotangens på $(0, \pi)$ har invers arccot : $\mathbb{R} \to (0, \pi)$

Observera att det på minräknare ofta står $\sin^{-1}$ istället för $\arcsin$ etc.

I figur 24 finns grafen till arcus sinus och i figur 25 finns centrala delen av grafen till arcus tangens.



Figur 24: Grafen av $\arcsin x$.



Figur 25: Centrala delen av grafen av $\arctan x$.

4.7.3 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 4c

4.7.1 Vilka av följande funktioner är jämna, udda eller inget av dem.

a) $f(x) = \sin(2x)$ b) $f(x) = \sin(x^2)$ c) $f(x) = (\sin x)^2$

d) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ f) $f(x) = \sin x + \cos x$

4.7.2 Antag att vi vet att $\sin\frac{\pi}{7} = c$. Ange följande trigonometriska funktionsvärden uttryckta med hjälp av c.

a) $\sin\frac{6\pi}{7}$ b) $\sin\frac{-\pi}{7}$ c) $\sin\frac{29\pi}{7}$

d) $\cos\frac{\pi}{7}$ e) $\tan\frac{\pi}{7}$ f) $\tan\frac{8\pi}{7}$

4.7.3 Beräkna följande värden för de inversa trigonometriska funktionerna. Var noga med att välja vinkel i rätt intervall för de olika funktionerna.

a) $\arcsin 1$ b) $\arccos 1$ c) $\arctan 1$

d) $\arcsin\frac{1}{2}$ e) $\arccos\frac{1}{2}$ f) $\arcsin(-\frac{1}{2})$

5 Facit

1.1.1 (a) 378 rest 18 (b) 357 (c) 7497 är delbart med 21

1.1.2 (a) 319
(b) $^{-}564$

1.1.3 (a) $a + 2 \cdot a \cdot b$
(b) $2 \cdot a \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot b - 2 \cdot a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b = 2a^2b + 2ab^2 - 2a^2 - 2ab$

1.2.1 (a) $\frac{1}{8}$ (b) $^{-}\frac{281}{28}$ (c) $^{-}\frac{196}{33}$ (d) $\frac{17}{20}$ (e) $\frac{251}{24}$ (f) $\frac{344}{255}$

1.2.2 (a) $\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$ (b) $^{-}\frac{11}{420}$

1.2.3 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{34}$ (c) $\frac{39}{22}$ (d) 24
(e) $\frac{38}{15}$ (f) $\frac{10}{57}$ (g) $\frac{273}{128}$ (h) $\frac{11011}{1536}$

1.2.4 (a) $^{-}2$ (b) $\frac{253}{340}$ (c) $^{-}\frac{1349}{1968}$

1.3.1 (a) 25 (b) 32 (c) 81 (d) $^{-}64$
(e) 1 (f) 100 (g) 1 (h) 1

1.3.2 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $^{-}\frac{1}{27}$ (c) 1

1.3.3 (a) 2^{-6} (b) 2^2 (c) 2^{-4}

1.3.4 (a) $\frac{4}{21}$ (b) $^{-}72$

1.4.1 (a) Ja.
(b) Ja. Motsatsen $2 > 3$ är ju falskt.
(c) Nej.

1.4.2
1. $c - a = (c - b) + (b - a) > 0$
2. Exemplet
3. $(b + d) - (a + c) = (d - c) + (b - a) > 0$
4. $b \cdot c - a \cdot c = (b - a) \cdot c > 0$
5. $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c = {}^{-}(b - a) \cdot c = (b - a) \cdot {}^{-}c > 0$

1.4.3 T.ex. $3 < 4$ och $2 < 6$ men $(3 - 2) < (4 - 6)$ gäller inte.

1.5.1	(a) 7	(b) 7	(c) 0	
1.5.2	(a) $^{-}2$ och 0	(b) $^{-}4.5$ och 10.5	(c) $^{-}4$	(d) $^{-}1$ och 4
	(e) Inget tal satisfierar ekvationen			
1.5.3	(a) $1 \leq x \leq 3$		(b) $^{-}8 < x < 2$	
	(c) $^{-}1 \leq x < 0$ eller $4 < x \leq 5$		(d) $x = {^{-}2}$	
1.6.1	(a) 0.7	(b) 300	(c) $15\sqrt{2}$	(d) $\sqrt{2}/5$
	(e) $\sqrt{3}$	(f) $10 - \sqrt{2}$		
1.6.2	(a) ± 5	(b) $\pm\sqrt{5}$	(c) $\pm\frac{2}{3}$	(d) $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$
	(e) 0			
1.6.3	(a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$	(b) $\frac{\sqrt{21}}{7}$	(c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$	(d) $\sqrt{11} + 3$
	(e) $^{-}(2 + \sqrt{5})$	(f) $3 - 2\sqrt{2}$		
1.7.1	(a) $3\sqrt{3}$	(b) $\sqrt{2}$	(c) $^{-}2\sqrt[3]{3}$	(d) $\sqrt[12]{3}$
	(e) $\sqrt[10]{2}$	(f) $\sqrt[8]{5}$	(g) $\sqrt[3]{4}$	(h) $2\sqrt[3]{3}$
1.7.2	(a) $\pm\sqrt{2}$	(b) 3	(c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	(d) $^{-}2$
	(e) Ingen reell rot			
1.7.3	(a) $3a$	(b) $\sqrt[4]{x}$	(c) $\sqrt[15]{x}$	(d) $\sqrt{\lvert a \rvert}$
	(e) $\sqrt[12]{a^5}$	(f) $\sqrt[4]{x^3}$		
1.8.1	(a) 3	(b) $\frac{1}{2}$	(c) 2	(d) $\frac{1}{2}$
	(e) 9	(f) $\frac{1}{9}$	(g) 5	
1.8.2	(a) $3^{\frac{1}{3}}$	(b) $2^{\frac{1}{2}}$	(c) $^{-}2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$	(d) $3^{\frac{1}{12}}$
	(e) $2^{\frac{1}{10}}$	(f) $5^{\frac{1}{8}}$	(g) $2^{\frac{2}{3}}$	(h) $2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$
1.8.3	(a) $3a$	(b) $x^{\frac{1}{4}}$	(c) $x^{\frac{1}{15}}$	(d) $a^{\frac{1}{2}}$

(e) $a^{\frac{5}{12}}$ (f) $x^{\frac{3}{4}}$

1.9.1 (a) $9t - u - 9v$ (b) $2a + 12c + 73x$

1.9.2 (a) $p + r$ (b) $3b + 2c$ (c) $4a - 2c$

1.9.3 (a) $20x^2z^8$ (b) $^-27a^4b^5c^4$ (c) $14p^3q^9r^4s^2$

1.9.4 (a) $27x^6y^3$ (b) $^-128a^8b^7c^6$ (c) $a^{4p}b^{7p}$

1.9.5 (a) $2x^2 + 3xy - 2y^2$ (b) $2x^3 + x^2y - 5xy^2 + 2y^3$

(c) $a^5 + x^5$ (d) $^-2x^4 + x^3 + 2x^2 - 13x + 6$

1.9.6 (a) $9a^2 - 24ab + 16b^2$ (b) $a^6 + 4a^3b^2 + 4b^4$ (c) $2m^8 + 32$

1.9.7 (a) $36 - x^2$ (b) $a^4 - y^2$ (c) $x^{12} - 81$

1.9.8 (a) $y^3 + 9y^2x + 27yx^2 + 27x^3$ (b) $27x^3 + 54x^2y^2 + 36xy^4 + 8y^6$

(c) $x^{12} - 18x^9 + 108x^6 - 216x^3$

1.9.9 (a) $(x - a^2)(x + a^2)$ (b) $x^2(3x + 5)(3x - 5)$

(c) $(x + 9)^2$ (d) $x^2y(x - 2y)^2$

(e) $x(x - 1)(x^2 + x + 1)$ (f) $3(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2)$

(g) $^-x^2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ (h) $2x^2y(3y^2 - 2x)(9y^4 + 6y^2x + 4x^2)$

1.9.10 (a) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

(b) $1 - 7y + 21y^2 - 35y^3 + 35y^4 - 21y^5 + 7y^6 - y^7$

(c) $32x^5 + 80x^4a^2 + 80x^3a^4 + 40x^2a^6 + 10xa^8 + a^{10}$

(d) $x^6y^{12} - 18x^5y^{10}z + 135x^4y^8z^2 - 540x^3y^6z^3 + 1215x^2y^4z^4 - 1458xy^2z^5 + 729z^6$

1.9.11 (a) $\dfrac{3a^6}{8c^2}$ (b) $\dfrac{8y}{9x}$ (c) $\dfrac{2a + y}{2a}$ (d) $3xy + 5y - 2x$

1.9.12 (a) $\dfrac{2}{b - a}$ (b) $\dfrac{x^2(1 + 2x)}{(1 - 2x)}$ (c) $\dfrac{^-1}{(x - y)^2}$

(d) $\dfrac{b^4 + 3}{b^4 - 3} = \dfrac{b^4 + 3}{(b - \sqrt[4]{3})(b + \sqrt[4]{3})(b^2 + \sqrt{3})}$

(e) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-b}$ (f) $\dfrac{a+1}{a}$ (g) $\dfrac{x^2+4}{x^2+2x+4}$

1.9.13 (a) a^2-ab+b^2 (b) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

(c) Kan inte förkortas (d) ${}^-(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

1.9.14 (a) $x-y^2$ (b) $\dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x(x^2-x+1)}$

(c) $\dfrac{x}{y}$ (d) $\dfrac{1}{2}$

1.9.15 (a) $\dfrac{18}{x(x+3)(x-3)}$ (b) $\dfrac{2x^2-7x-2}{2x(x-4)}$

(c) $\dfrac{{}^-1}{x(x+1)(x-1)}$ (d) $\dfrac{8-2x^2-x^3}{4(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)}$

1.9.16 (a) $|c+2|$, gäller för alla reella c

(b) $\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} 1 & \text{om } c>0 \\ {}^-1 & \text{om } c<0 \end{cases}$ gäller för alla reella $c \neq 0$

(c) 1, gäller för $c>0$

(d) ${}^-c\sqrt{9-c}$, gäller för $c<9$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{c-2}}$, gäller för $c>2$

(f) $\dfrac{|c|\sqrt{c+2}}{c}=\begin{cases} \sqrt{c+2} & \text{om } c>0 \\ {}^-\sqrt{c+2} & \text{om } {}^-2\leq c<0 \end{cases}$, gäller för $c\geq {}^-2, c\neq 0$

2.1.1 (a) $x=7$ (b) $x=-\frac{3}{7}$ (c) Alla tal. (d) Inga.

2.1.2 (a) $y=3x-7$ (b) $y=\frac{2x-3}{11}$

2.2.1 (a) 1 och -4 (b) -1 och 3 (c) -1 och $\frac{3}{2}$

(d) 0 och $-\frac{3}{7}$ (e) $\frac{3}{2}$ (f) $-\frac{3+\sqrt{29}}{10}$ och $-\frac{3-\sqrt{29}}{10}$

2.2.2 (a) $(x+2)^2-3$ (b) $(2x-9)^2+19$ (c) $39-(x+6)^2$

2.2.3 (a) $(x-2)(x-3)$ (b) $-2(x-1)(x+4)$

(c) $(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})$ (d) x^2+x+1

2.2.4 (a) $x^2+3x-10=0$ (b) $6x^2-x-2=0$

(c) $x^2-2x-4=0$

2.3.1 (a) 1 och -4 (b) $6+3\sqrt{3}$ och $6-3\sqrt{3}$

(c) Ingen reell rot

2.3.2 (a) 9 (b) 2 (c) Ingen rot (d) 2 (e) 4

(f) 12 (g) 3 (h) $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ (i) 6

2.3.3 (a) 2, -2, $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$ (b) 5, -5, 7 och -7 (c) 2 och -2

(d) $\sqrt{6}$ och $-\sqrt{6}$ (e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ och $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

2.3.4 (a) 9 (b) $19-6\sqrt{10}$ (c) 1 och 4

2.4.1 (a) $x=3,5,\ y=1$ (b) $x=4,\ y=1$ (c) $x=-2,\ y=2$

(d) saknar lösning

(e) oändligt många lösningar, av formen: $x=t,\ y=3-5t$ för alla reella t

(f) $s=3,\ t=1$ (g) $x=2,\ y=3$ (h) $x=3,\ y=5,\ z=2$

(i) $x=10,\ y=-0,04,\ z=0,06$ (j) $a=-1,\ b=1,\ c=2$

(k) $x=1,\ y=-2,\ z=3$

2.4.2 Han var 48 år.

2.5.1 (a) $\frac{x-1}{x+4}$ (b) $\frac{x+2}{x^2+2x-3}$

2.5.2 (a) $\{0,\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$ (b) $\{-2,1,3\}$

(c) $\{-2,\frac{-5-\sqrt{21}}{2},\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\}$ (d) $\{2\}$

2.5.3 (a) 1 är en trippelrot (b) 1 (enkelrot)

(c) 1 och -1 är trippelrötter

2.5.4 (a) $(x+2)(x-1)(x-3)$ (b) $(x+2)(x^2+5x+1)$

(c) $(x-2)(-3+x-x^2)$

3.2.1 (a) $180°,\ \pi$ (b) $45°,\ \pi/4$ (c) $120°,\ 2\pi/3$ (d) $60°,\ \pi/3$

(e) $135°,\ 3\pi/2$ (f) $420°,\ 7\pi/3$

3.2.2 (a) $\pi/2$ (b) $\pi/6$ (c) $\pi/4$ (d) $3\pi/2$

(e) $\pi/10$ (f) $5\pi/6$ (g) $11\pi/18$

3.2.3 (a) $540°$ (b) $90°$ (c) $135°$ (d) $75°$

3.2.4 (a) $2\pi/3$ (b) $25\pi/6$ (c) $20\pi/9$

3.2.5 (a) $120°$ (b) $108°$ (c) $(1-\frac{2}{n})\cdot 180°$

3.2.6 (a) $1/2$ (b) $1/2$ (c) $1/4$ (d) $2-\sqrt{3}$

3.2.7 (a) $B=55°,\ a\approx 2,3,\ b\approx 3,3$
(b) $B=3\pi/10=54°,\ b=4,1,\ c\approx 5,1$
(c) $b\approx 2,2,\ A\approx 41,8°,\ B\approx 48,2°$
(d) $c\approx 3,6,\ A\approx 33,7°,\ B\approx 56,3°$
(e) $A=35°,\ a\approx 3,5,\ c\approx 6,1$

3.2.8 (a) $\cos v=4/5,\ \tan v=3/4$
(b) $\cos v=\sqrt{5}/3,\ \tan v=2/\sqrt{5}$
(c) $\sin v=2\sqrt{2}/3,\ \tan v=2\sqrt{2}$
(d) $\sin v=\sqrt{21}/5,\ \tan v=\sqrt{21}/2$
(e) $\sin v=1/\sqrt{5},\ \cos v=2/\sqrt{5}$
(f) $\sin v=24/25,\ \cos v=7/25$
(g) $\sin v=10/\sqrt{149},\ \cos v=7/\sqrt{149}$

3.3.1 (a) 6 (b) $\sqrt{13}$ (c) 5 (d) 10 (e) $\sqrt{13}$

3.3.2 (a) $(0,-2)$ (b) $(0,9/2)$

3.3.3 (a) $(1+\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ eller $(1-\sqrt{3},2\sqrt{3})$
(b) $\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2},\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right)$ eller $\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2},\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$

3.4.1 (a) $3y = 2x$ (b) $2x + 3y = 7$ (c) $y = 3$ (d) $x + 2 = 0$

3.4.2 (a) $2x - y - 1 = 0$ (b) $3x + 2y = 0$

(c) $y = 0$ (d) $x + 4y - 2 = 0$

(e) $21x + 45y - 19 = 0$ (f) $7x + 2 = 0$

3.4.3 (a) $(-3, 4)$ (b) $(-6/7, 4/7)$

(c) saknar skärningspunkt (parallella linjer)

(d) sammanfallande linjer

3.4.4 Bevis

3.4.5 (a) $2x - y - 4 = 0$ (b) $3x + y - 3 = 0$ (c) $x = 0$

3.4.6 (a) $5x - 2y = 0$ (b) $3x + y + 2 = 0$ (c) $9x - 5y - 3 = 0$

(d) $4x + y = 0$

3.5.1 (a) $x^2 + y^2 = 81$ (b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$

(c) $(x + 6)^2 + y^2 = 25/4$

3.5.2 (a) $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 0$ (b) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 2 = 0$

(c) $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 63$

3.5.3 Cirkeln med medelpunkt och radie

(a) origo, $R = \sqrt{3}$ (b) $(0, 2)$, $R = 3$ (c) $(1, -3/4)$, $R = 5/4$

(d) $(-2, 1/2)$, $R = 1/2$ (e) $(1/2, -2/3)$, $R = 4/3$

3.5.4 (a) $(1, 3)$ och $(0, -2)$ (b) $(0, -2)$, tangering

(c) ingen skärningspunkt

3.5.5 (a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 2$ (b) punkterna ligger i rät linje

(c) $x^2 + y^2 - 3y - 19 = 0$

3.6.1 (a) tredje (b) andra (c) andra (d) fjärde

(e) andra (f) andra (g) första

3.6.2 (a) -1 (b) -1 (c) $\sqrt{3}/2$ (d) $\sqrt{3}/2$

(e) 0 (f) 1

3.6.3 Bevis

3.6.4 (a) $2\sqrt{2}/3$ (b) $\sqrt{21}/5$

(c) $\sqrt{5}/3$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{5}/3$ (andra kvadranten)

3.6.5 (a) $0,8$

(b) $\sqrt{21}/5$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{21}/5$ (fjärde kvadranten)

3.6.6 (a) $-1/\sqrt{15}$ (b) $-\sqrt{91}/3$

(c) $1/\sqrt{3}$ (tredje kvadranten) eller $-1/\sqrt{3}$ (fjärde kvadranten)

(d) $\sqrt{77}/2$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{77}/2$ (fjärde kvadranten)

3.6.7 (a) $\sin v = -2/\sqrt{5},\ \cos v = -1/\sqrt{5}$

(b) $\sin v = 1/\sqrt{10},\ \cos v = -3/\sqrt{10}$

(c) $\sin v = 5/\sqrt{26},\ \cos v = -1/\sqrt{26}$ (andra kvadranten) eller
$\sin v = -5/\sqrt{26},\ \cos v = 1/\sqrt{26}$ (fjärde kvadranten)

(d) $\sin v = 1/\sqrt{5},\ \cos v = -2/\sqrt{5}$ (andra kvadranten) eller
$\sin v = -1/\sqrt{5},\ \cos v = 2/\sqrt{5}$ (fjärde kvadranten)

3.6.8 (a) $-1/2$ (b) $\sqrt{3}/2$ (c) $-\sqrt{3}/2$ (d) -1 (e) $1/\sqrt{2}$

(f) $-1/2$ (g) $-1/2$ (h) $1/\sqrt{3}$ (i) $-1/\sqrt{2}$ (j) $-\sqrt{3}$

3.6.9 (a) $c \approx 8,5;\ B \approx 32,1°;\ C \approx 89,6°$

(b) $a_1 \approx 84,3;\ A_1 \approx 104,8°;\ C_1 \approx 46,7°$ eller
$a_2 \approx 27,3;\ A_2 \approx 18,2°;\ C_2 \approx 133,3°$

(c) $b_1 \approx 21,7;\ A_1 \approx 44,8°;\ B_1 \approx 104,0°$ eller
$b_2 \approx 5,25;\ A_2 \approx 135,2°;\ B_2 \approx 13,6°$

(d) orimligt

3.6.10 (a) $c \approx 12,0;\ A \approx 115,3°;\ B \approx 25,2°$

(b) $a \approx 10,5;\ B \approx 19,4°;\ C \approx 43,5°$

(c) $b \approx 42,5;\ A \approx 148,8°;\ C \approx 8,5°$

3.6.11 (a) $15,2$ (b) $7,7$ (c) $4,2$

3.6.12 (a) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$ (b) $2+\sqrt{3}$ (c) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$

(d) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$ (e) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$ (f) $-(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$

3.6.13 (a) 1 (b) $10/11$

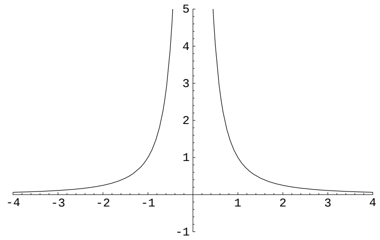
3.6.14 (a) $(1-2\sqrt{30})/12$ (b) $0,96$

(c) $2(1-3\sqrt{14})/25$ (om u och v i samma kvadrant) eller
$2(1+3\sqrt{14})/25$ (om u och v i olika kvadranter)

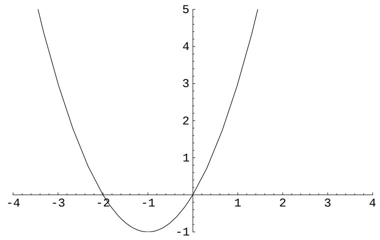
3.6.15 Härledning

4.1.1 (a) Strängt växande och därmed injektiv, udda samt har sig själv som invers.

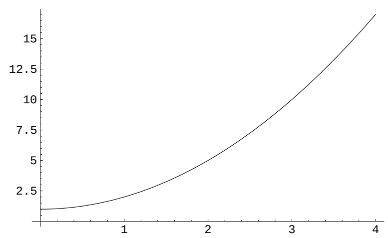
(b) Varken växande eller avtagande, ej injektiv men jämn ty $b(-x) = 1/(-x)^2 = 1/x^2 = b(x)$ och saknar därför invers.



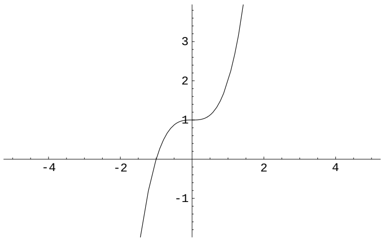
(c) Varken växande eller avtagande, ej injektiv ty t ex $c(-2) = c(0) = 0$ så saknar invers, ej udda eller jämn (t ex $c(-2) = 0$ och $c(2) = 8$.



(d) Strängt växande och därmed injektiv, varken udda eller jämn då bara definierad för icke-negativa tal. Inversen ges av $d^{-1} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ med $d^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.



(e) Strängt växande och därmed injektiv, varken udda eller jämn då t ex $e(-1) = 0$ och $e(1) = 2$. Inversen ges av $e^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $e^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.



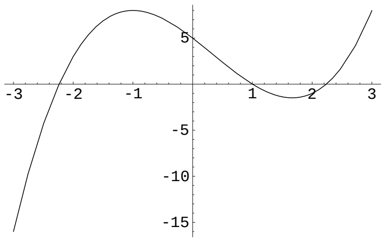
4.1.2
$$f \circ f(x) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$
$$f \circ g(x) = (\frac{1}{1+x^2})^2 - 1 = \frac{-x^2(2+x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$g \circ f(x) = \frac{1}{1+(x^2-1)^2} = \frac{1}{2-2x^2+x^4}$$
$$g \circ g(x) = \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+1} = \frac{1+2x^2+x^4}{2+2x^2+x^4}$$

4.2.1 (a) $p(x) = x^2 + 2x - 7 = (x+1)^2 - 8$ ger rötterna $-1 \pm \sqrt{8} = -1 \pm 2\sqrt{2}$, minimum $p(-1) = -8$ så värdemångden är $[-8, \infty)$.

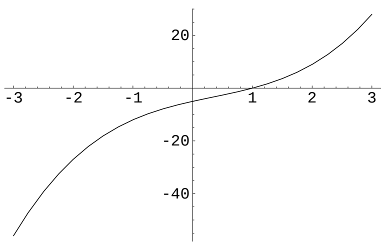
(b) $p(x) = x^2 - 3x + 6 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$ ger att det saknas (reella) rötter, minimum $p(\frac{3}{2}) = \frac{15}{4}$ så värdemångden är $[\frac{15}{4}, \infty)$.

(c) $p(x) = 5 - 4x - x^2 = -(x+2)^2 + 9$ ger rötterna -5 och 1, maximum $p(-2) = 9$ så värdemångden är $(-\infty, 9]$.

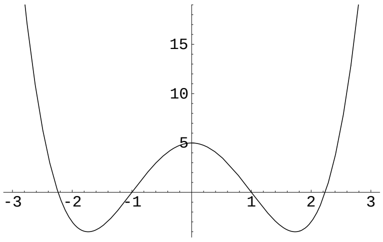
4.2.2 (a) Nollställen i $\{-\sqrt{5}, 1, \sqrt{5}\}$. Funktionen går mot $-\infty$ respektive ∞ då x går mot $-\infty$ respektive ∞.



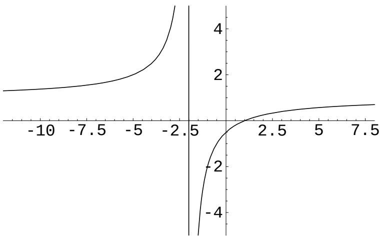
(b) Nollställe i 1. Funktionen går mot $-\infty$ respektive ∞ då x går mot $-\infty$ respektive ∞.



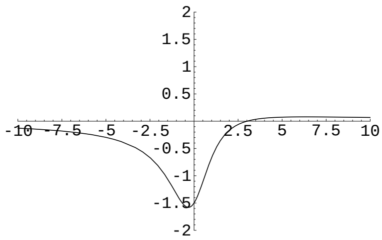
(c) Nollställe i $\{-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}\}$. Funktionen går mot ∞ då x går mot $-\infty$ eller ∞.



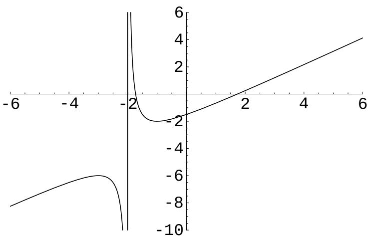
4.3.1 (a) Rot i 1 och funktionen är definierad för alla tal utom -2.



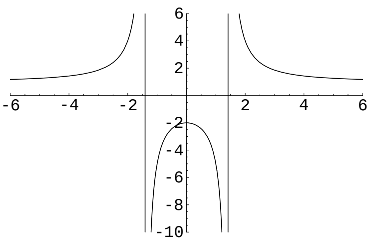
(b) Rot i 3 och funktionen är definierad för alla tal.



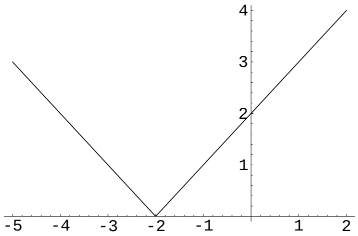
(c) Rötter i $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ och funktionen är definierad för alla tal utom -2.



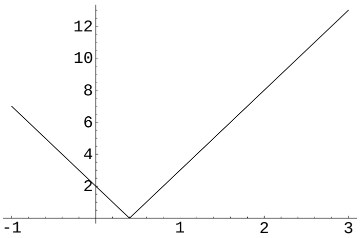
(d) (Reella) rötter saknas och funktionen är definierad för alla tal utom $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.



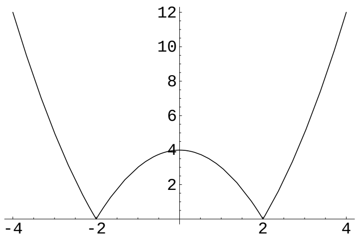
4.4.1 (a) $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{om } x \geq -2, \\ -(x+2) & \text{om } x < -2. \end{cases}$



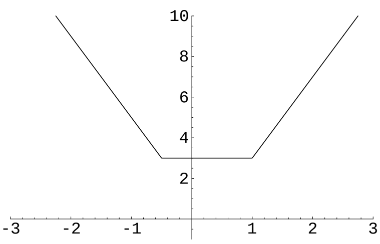
(b) $|5x-2| = \begin{cases} 5x-2 & \text{om } x \geq \frac{2}{5}, \\ -(5x-2) & \text{om } x < \frac{2}{5}. \end{cases}$



(c) $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{om } x \leq -2 \text{ och } x \geq 2, \\ -(x^2-4) & \text{om } -2 < x < 2. \end{cases}$



(d) $|2x-2|+|2x+1| = \begin{cases} (2x-2)+(2x+1) = 4x-1 & \text{om } x \geq 1, \\ -(2x-2)+(2x+1) = 3 & \text{om } -\frac{1}{2} < x < 1, \\ -(2x-2)-(2x+1) = -4x+1 & \text{om } x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$



4.5.1 $f_1(x) = x^{-\frac{1}{5}}$: Heldragen. $f_1^{-1} = f_3$. Maximal definitionsmängd: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f_2(x) = x^5$: Prickad. $f_2^{-1} = f_4$. Maximal definitionsmängd: $\mathbb{R}$
$f_3(x) = x^{-5}$: Streckad/prickad. $f_3^{-1} = f_1$. Maximal definitionsmängd: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f_4(x) = x^{\frac{1}{5}}$: Streckad. $f_4^{-1} = f_2$. Maximal definitionsmängd: $\mathbb{R}$

4.6.1 Det är bara bara a) och e) som stämmer.

4.6.2 (a) 3 (b) -2 (c) 4
(d) 0.7 (e) $\frac{1}{4}$ (f) 2

4.6.3 (a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -1
(d) -2 (e) 7 (f) $\frac{1}{3}$

4.6.4 (a) $x = 1$ (b) $x = 10$ (c) $x = e^2$
(d) $x = 0.0001$ (e) $x = 10\sqrt{10}$

4.6.5 (a) 2 (b) 0 (c) $\ln 2$

4.7.1 (a) udda (b) jämn (c) jämn
(d) jämn (e) udda (f) inget

4.7.2 (a) c (b) $-c$ (c) c
(d) $\sqrt{1-c^2}$ (e) $\dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ (f) $\dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}}$

4.7.3 (a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) $\dfrac{\pi}{4}$
(d) $\dfrac{\pi}{6}$ (e) $\dfrac{\pi}{3}$ (f) $-\dfrac{\pi}{6}$