Utdrag ur Sommarmatte

Matematiska Vetenskaper

21 augusti 2008

Innehåll

1 Aritmetik och Algebra

I detta kapitel skall vi först arbeta med grundläggande aritmetik, alltså de fyra räknesätten, för olika typer av tal. Detta lägger en stabil grund för algebra, som här innebär grundläggande räkning med symboler vilket vi behandlar i slutet av kapitlet.

Alla räkneregler som används i algebraiska räkningar, har sin bakgrund i hur man räknar med tal. Alla reglerna kan därför förklaras genom att man utgår från aritmetiken. Oftast räcker det att utgå från ett exempel, om man samtidigt övertygar sig om att exemplet är allmängiltigt. Även om du kan vissa regler utantill, som ”*minus minus är plus*”, så vinner du i längden på att kunna förklara varför regeln gäller.

Vi rekommenderar att du *inte* använder räknare eller formelsamling då du löser uppgifterna. De kunskaper du får genom att dels räkna själv och tänka på vilka räkneregler du använder och dels lära dig en del fakta i stället för att förlita dig på formelsamlingen, är oerhört värdefulla för dina fortsatta studier. I många matematikutbildningar förväntas du klara dig utan hjälpmedel.

1.1 Räkning med naturliga tal och heltal

De *naturliga talen* är talen $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\cdots$. (De tre avslutande punkterna i listan indikerar att mönstret fortsätter utan slut.) De *negativa heltalen* är $-1,\ -2,\ -3,\ -4\cdots$. Ibland skriver man negativa tal med en parentes: $(-1),\ (-2),\ (-3),\ (-4)\cdots$.

I detta kapitel skriver vi minustecknet lite upphöjt för att det inte skall se ut likadant som subtraktionstecknet: ${}^{-}1,\ {}^{-}2,\ {}^{-}3,\ {}^{-}4,\cdots$. Vi vill poängtera att det handlar om ett speciellt tal, eller en operation på ett tal, och inte subtraktion. Men det händer, speciellt längre fram i kapitlet, att minustecknet skrivs på vanligt sätt. Från och med kapitel 2 förekommer inte det upphöjda minustecknet. Naturligtvis kan du själv skriva som du är van. I proven på webben skall du skriva t.ex. -3.

De naturliga talen och de negativa talen bildar tillsammans *heltalen*
$\cdots{}^{-}4,\ {}^{-}3,\ {}^{-}2,\ {}^{-}1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\cdots$.

Ofta talar man om *mängden* av alla naturliga tal. Ordet mängd, används här på ett matematiskt sätt. I normalsvenska betyder ordet *ett stort antal* eller *en mätbar ansamling*. En matematisk mängd är en samling objekt, element. Mängden av de naturliga talen har alltså som element naturliga tal. Talet 13 är ett element i mängden, liksom varje annat naturligt tal. Mängden av alla naturliga tal betecknas ofta $\mathbb{N}$. Vill vi poängtera att 13 är ett naturligt tal kan vi skriva $13 \in \mathbb{N}$ (läses: 13 tillhör de naturliga talen).

På samma sätt talar man om mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$, mängden av alla negativa heltal $\mathbb{Z}_{-}$ och mängden av alla positiva heltal $\mathbb{Z}_{+}$. (Notera att 0 varken är ett positivt eller ett negativt tal.)

1.1.1 Naturliga tal

Naturliga tal kan adderas och multipliceras. Vid addition och multiplikation gäller det man kallar *kommutativitet*: $a + b = b + a$ och $a \cdot b = b \cdot a$ för alla naturliga tal a och b.

Om fler än två tal skall adderas vet vi att additionen kan ske i vilken ordning som helst med samma resultat. Vi tänker ofta inte ens på att man utför flera operationer och väljer ordningen. Summan av talen 3, 6 och 13 är 22 hur vi än räknar. Vill man skriftligt redovisa ordningen på additionerna används parenteser tillsammans med *första prioritetsregeln: operationen inom parentes utförs först*: $3 + (6 + 13) = 3 + 19$, $(3 + 6) + 13 = 9 + 13$. Om inga parenteser skrivits ut gäller *läsriktningsprioritet*, den vänstra additionen utförs först. $3 + 6 + 19$ är samma som $(3 + 6) + 13$

Vid addition och multiplikation gäller *associativitet*: $a + (b + c) = (a + b) + c$ och $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ för alla naturliga tal a, b och c.

Då både addition och multiplikation är inblandade, som i beräkningen av $3 + 4 \cdot 7$, kommer prioritetsregeln *multiplikation före addition* in: $3 + 4 \cdot 7 = 3 + 28$. Här gäller alltså *inte* läsriktningsprioritet.

Vill vi att additionen skall utföras först krävs parenteser: $(3 + 4) \cdot 7 = 7 \cdot 7$. Denna uträkning kan också göras med *distribution*: $(3 + 4) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 21 + 28$

Vid addition följt av multiplikation gäller *distributivitet*: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ för alla naturliga tal a, b och c.

Vill man förstå räkneregler som $a - (b - c) = (a - b) + c$ är det också enkelt att utgå från ett exempel: Vi skall beräkna $14 - (6 - 2)$. Om vi då först beräknar $14 - 6$ så har vi subtraherat 2 för mycket. Alltså är $14 - (6 - 2) = (14 - 6) + 2$. Addition och subtraktion har samma prioritet. Med läsriktningsprioritet kan vi därför skriva det senare utan parenteser: $14 - (6 - 2) = 14 - 6 + 2$. Generellt $a - (b - c) = a - b + c$, som är första exemplet på *minus minus är plus*.

På samma sätt kan man inse att $a - b - c = a - (b + c)$ för alla naturliga tal a, b och c.

Nu några ord om division av naturliga tal. För att underlätta polynomdivision längre fram, är det värdefullt att kunna utföra lång division av naturliga tal för hand, t.ex. med hjälp av uppställning i ”liggande stolen” eller ”trappan”. Vilken man väljer är helt oviktigt, algoritmen är samma. Här nedan används ”liggande stolen”.

Kvot	
Täljare	**Nämnare**

Exempel. Vi önskar beräkna $8476 \div 23$. (Här används $\div$ som divisionstecken.)

Lösning.

För att det skall vara enklare att följa kalkylerna redovisas varje steg i en ny ”stol”. En förklaring ges efter exemplet.

Kvot		3		36		368	
8476	23	8476	23	8476	23	8476	23
		-69		-69		-69	
		15		157		157	
				-138		-138	
				19		196	
						-184	
						12	**Rest**

Vi ser här att $8476 \div 23 = 368$ rest 12. $\square$

Om du tycker att algoritmen är svårbegriplig eller krånglig kan du kanske ha hjälp av följande förklaring:

Multiplikation och division av naturliga tal är motsatta operationer. Alltså: eftersom $6 \cdot 7 = 42$ så är $42 \div 7 = 6$. Men multiplikation är samma som upprepad addition: $6 \cdot 7 = 42$ *eftersom* $7+7+7+7+7+7 = 42$. Division är därför samma som upprepad subtraktion: $42 \div 7 = 6$ *eftersom* $42-7-7-7-7-7-7 = 0$. (De gamla mekaniska räknemaskinerna byggde helt på denna princip.) Om divisionen inte går jämnt ut får man en *rest*. $45 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3$ alltså $42 \div 7 = 6$ med rest 3.

Det är väldigt opraktiskt att subtrahera talet 23 från talet 8476 mer än 300 gånger. Därför effektiviserar man genom att först räkna ut hur många hundra gånger 23 går i 8476.

Eftersom $84 \div 23 = 3$ rest 15 går 23 minst 300 gånger i 8476, men inte 400 gånger. Vi kan därmed skriva hundratalssiffran 3 i kvoten och subtrahera $300 \cdot 23$ från 8476.

Vi har att $84 - 3 \cdot 23 = 15$ och $8476 - 300 \cdot 23 = 1500 + 76 = 1576$. I den andra ”stolen” är inte nollorna utskrivna, de är underförstådda. I den tredje stolen tas inte siffran 6 med i resten 1576. Det betyder inget, men man brukar göra så eftersom den inte kommer in i kalkylerna i detta steg.

$157 \div 23 = 6$ rest 19. Alltså går 23 minst 60 gånger i 1576, men inte 70 gånger. $157 - 6 \cdot 23 = 19$ och $1576 - 60 \cdot 23 = 190 + 6 = 196$. Vi kan nu skriva tiotalssiffran 6 i kvoten.

Slutligen $196 \div 23 = 8$ rest 12. Alltså är $196 = 8 \cdot 23 + 12$ och kvotens entalssiffra är 8.

Kalkylerna ovan kan sammanföras: $8476 = 300 \cdot 23 + 1576 = 300 \cdot 23 + 60 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 8 \cdot 23 + 12 = 368 \cdot 23 + 12$. Alltså $8476 \div 23 = 368$ rest 12.

Testövning

1. Beräkna $937 \div 31$
2. Beräkna $427 \div 23$

Svar:

1. 30 rest 7
2. 18 rest 13

1.1.2 Negativa tal

Addition av naturliga tal är ju direkt sammankopplad med antalsräkning och därmed (nästan) en medfödd mänsklig förmåga. Eftersom de övriga räknesätten för naturliga tal bygger på addition, kan de också anses medfödda.

Då det gäller negativa tal är situationen annorlunda: de är objekt man *definierar* med hjälp av de naturliga talen. Till varje naturligt tal a införs ett negativt (motsatt) tal ${}^{-}a$. Man måste sedan *definiera* hur man skall räkna med dessa nya objekt. Att göra det i detalj här skulle ta mycket utrymme, men vi skall ändå försöka ge en lagom repetition och kanske fördjupning.

Man måste först definiera addition på ett sådant sätt att det leder till
$7 + {}^{-}3 = 7 - 3 = 4$, $4 + {}^{-}7 = {}^{-}(7 - 4) = {}^{-}3$, ${}^{-}5 + 7 = 7 - 5 = 2$, ${}^{-}5 + 3 = {}^{-}(5 - 3) = {}^{-}2$ och ${}^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}(5 + 3) = {}^{-}8$.

Det är ganska lätt att argumentera för att ovanstående är enda rimliga additionen. Men det är en *definition*, något man har bestämt.

Det är inte självklart, men antagligen inte överraskande, att additionen, även med negativa tal, är associativ: $a + (b + c) = a + b + c$. Den är också kommutativ $a + b = b + a$. Båda dessa egenskaper kan man *bevisa*.

Av $7 + {}^{-}3 = 7 - 3$ följer att subtraktion för naturliga tal kan ersättas av en addition: Om a och b är naturliga tal sådana att $a > b$ så gäller $a - b = a + {}^{-}b$.

Om vi låter ${}^{-}b$ beteckna det motsatta talet till b även då b är negativt, ${}^{-}({}^{-}3) = 3$ (*minus minus är plus*), skall vi se att all subtraktion kan erhållas genom addition av motsatt tal.

Sats: För alla heltal a och b gäller det att $a - b = a + {}^{-}b$.

Bevis: Subtraktion kan ses som uppdelning av tal eller lösning till en ekvation:
$a - b$ är det (unika) tal x som uppfyller $x + b = a$.

Vi ser att $x = a + {}^{-}b$ är lösning till ekvationen eftersom $(a + {}^{-}b) + b = a + ({}^{-}b + b) = a + 0 = a$. Att det inte finns någon annan lösning ser vi genom att addera ${}^{-}b$ till båda sidor av likheten: $(x + b) + {}^{-}b = a + {}^{-}b$.

Eftersom additionen är associativ och $b + {}^{-}b = 0$ så följer att vänsterledet är $(x + b) + {}^{-}b = x + 0 = x$ och därmed $x = a + {}^{-}b$. $\square$

Också multiplikation för heltal måste *definieras*. Precis som vid addition måste man tänka på alla kombinationer av naturligt och negativt.

$4 \cdot {}^{-}7 = {}^{-}(4 \cdot 7) = {}^{-}28, \quad {}^{-}5 \cdot 7 = {}^{-}(5 \cdot 7) = {}^{-}35,$ och $\quad {}^{-}5 \cdot {}^{-}3 = 5 \cdot 3 = 15,$ (*minus minus är plus*).

Återigen är det ganska lätt att argumentera för att ovanstående är enda rimliga multiplikationen. Men det är en *definition*, något man har bestämt.

Det är inte heller självklart, men bevisbart, att samma räkneregler gäller för heltalen som för de naturliga talen. I läroböcker använder man ofta vissa av räknereglerna för att förklara hur multiplikation måste gå till. Det finns nämligen inget annat sätt att räkna om man vill att räknereglerna skall fortsätta gälla.

Testövning

1. Beräkna $5 - ({}^{-}4 - 7)$
2. Beräkna ${}^{-}5 \cdot ({}^{-}4 - 3)$
3. Beräkna ${}^{-}5 \cdot {}^{-}4 - 3$

Svar:

1. 16
2. 35
3. 17

1.1.3 Räkneregler

Här sammanfattas de prioritetsregler och räkneregler som behandlats i kapitlet.

Prioriteringsordning

1. Operation mellan parenteser.
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion
4. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

Räkneregler

För alla heltal a, b och c gäller det att

- $a + b = b + a$ *kommutativitet*
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ *associativitet*
- $a - (b - c) = a - b + c$ *minus minus är plus*
- $a - (b + c) = a - b - c$
- $a + {}^{-}a = 0$
- ${}^{-}({}^{-}a) = a$ *minus minus är plus*
- $a \cdot b = b \cdot a$ *kommutativitet*
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *associativitet*
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *distributivitet*
- $a \cdot {}^{-}b = {}^{-}(a \cdot b)$
- ${}^{-}1 \cdot a = {}^{-}a$
- ${}^{-}a \cdot {}^{-}b = a \cdot b$ *minus minus är plus*

1.1.4 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1a

1.1.1 Bestäm kvot och rest till

a) $7956 \div 21$ b) $7497 \div 21$

c) Är något av talen 7956 eller 7497 delbart med 21?

1.1.2 Beräkna

a) $7 - {}^{-}2 \cdot (3 - 9) \cdot ((2 + {}^{-}5 - 8) \cdot ({}^{-}3 - {}^{-}5) - 4)$

b) $({}^{-}4 - 2) \cdot (({}^{-}6 - {}^{-}9) - ((6 - {}^{-}7 + 3) \cdot ({}^{-}2 - 3) + {}^{-}1 \cdot (7 - {}^{-}4)))$

1.1.3 Skriv följande utan parenteser och utan negativa (motsatta) tal.

a) $a - {}^{-}b \cdot (a+1) - b \cdot ({}^{-}a + 1)$

b) $({}^{-}a \cdot {}^{-}b + a \cdot (b - 2 \cdot {}^{-}a)) \cdot ({}^{-}1 + b)$

1.2 Bråkräkning

1.2.1 De rationella talen

Rationella tal eller *bråktal* skrivs $\frac{p}{q}$, där p och q är heltal och $q \neq 0$. Några exempel på rationella tal är $\frac{3}{7}, \frac{{}^{-}5}{34}, \frac{{}^{-}5}{{}^{-}12}, \frac{7}{1}, \frac{1}{7}$.

Om s är ett heltal så är de två bråktalen $\frac{p}{q}$ och $\frac{s \cdot p}{s \cdot q}$ lika. Man säger att bråktalet $\frac{p}{q}$ *förlängts* med (faktorn) $s \neq 0$ till $\frac{s \cdot p}{s \cdot q}$, eller att $\frac{s \cdot p}{s \cdot q}$ *förkortats* med s till $\frac{p}{q}$.

Talen $\frac{7}{11}$ och $\frac{14}{22}$ är lika eftersom $\frac{7}{11} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \frac{14}{22}$.
Man kan förlänga/förkorta med negativ faktor också:
$\frac{{}^{-}7}{{}^{-}11} = \frac{{}^{-}1 \cdot 7}{{}^{-}1 \cdot 11} = \frac{7}{11}, \quad \frac{7}{{}^{-}11} = \frac{{}^{-}1 \cdot 7}{{}^{-}1 \cdot {}^{-}11} = \frac{{}^{-}7}{11}$.
I allmänhet försöker man ange bråktal på enklaste formen så att täljaren p och nämnaren q inte har någon gemensam faktor (utom 1 eller ${}^{-}1$).

Man kan välja att ge talet på blandad form istället för ren bråkform. I så fall skriver man $3\frac{1}{4}$ istället för $\frac{13}{4}$. Det är emellertid lätt att missuppfatta den blandade formen och läsa $3 \cdot \frac{1}{4}$ som är $\frac{3}{4}$.

Mängden av alla rationella tal brukar betecknas $\mathbb{Q}$.

Talet $\frac{p}{1}$ identifieras med heltalet p. På det viset är alla heltal också rationella tal. Mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$, är en *delmängd* av mängden av alla rationella tal, $\mathbb{Q}$. Detta skrivs $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

1.2.2 Räkning med rationella tal

Addition och subtraktion av bråktal utförs genom att de två termerna skrivs med gemensam nämnare:
$\frac{7}{12} + \frac{39}{15} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 39}{4 \cdot 15} = \frac{35}{60} + \frac{156}{60} = \frac{35 + 156}{60} = \frac{191}{60}$.

Generellt är
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a}{d\cdot b}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}$$

Det är en god vana att inte förlänga med mer än nödvändigt. Då man arbetar med rationella funktioner, se avsnitt **??**, blir det extra viktigt.

Om man följer den allmänna principen vid addition av $\frac{7}{12}$ och $\frac{39}{15}$ får man
$$\frac{7}{12}+\frac{39}{15}=\frac{15\cdot 7}{15\cdot 12}+\frac{12\cdot 39}{12\cdot 15}=\frac{105}{180}+\frac{468}{180}=\frac{105+468}{180}=\frac{573}{180}.$$

Här kan och bör man förkorta med 3 som är den gemensamma faktorn i de två nämnarna 12 och 15.

Eftersom $\frac{a}{b}+\frac{{}^-a}{b}=\frac{a+{}^-a}{b}=\frac{0}{b}=0$ är det logiskt att kalla $\frac{{}^-a}{b}$ det motsatta talet till $\frac{a}{b}$ och skriva $\frac{{}^-a}{b}={}^-\left(\frac{a}{b}\right)$

Subtraktion av bråktal görs på motsvarande sätt som addition:
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b},$$

men man kan, som då man subtraherar heltal, addera det motsatta talet istället:
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+{}^-\left(\frac{c}{d}\right).$$

$$\frac{7}{12}-\frac{39}{15}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}-\frac{4\cdot 39}{4\cdot 15}=\frac{35}{60}-\frac{156}{60}=\frac{35-156}{60}={}^-\frac{121}{60}.$$

Multiplikation av rationella tal definieras av:
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Att denna definition är den enda rimliga kan man motivera på följande sätt:

- Multiplikation med heltal skall motsvara upprepad addition.

  Alltså är $3\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{c}{d}+\frac{c}{d}=\frac{3\cdot c}{d}$

- Vidare skall multiplikation vara associativ. Alltså är $\frac{c}{d}=\frac{7}{7}\cdot\frac{c}{d}=7\cdot\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{c}{d}\right)$.

  Men detta är möjligt endast om $\frac{1}{7}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{7\cdot d}$.

- Tillsammantaget ger detta $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) = a \cdot \frac{c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Division av rationella tal ges av

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Detta motiveras av att division är den till multiplikation motsatta operationen:
Eftersom $3 \cdot 4 = 12$ så är $12 \div 4 = 3$.

Så kan vi resonera också då det gäller rationella tal:

Eftersom $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ så är $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Speciellt är $13 \div 4 = \frac{13}{1} \div \frac{4}{1} = \frac{13 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{13}{4}$.
I kapitel 1.1.1 skulle vi sagt att $13 \div 4 = 3$ rest 1. Då handlar det om *heltalsdivision* som speglar t.ex. en fördelning: *om tretton ägg skall fördelas på kartonger som rymmer fyra ägg vardera så får man tre fulla kartonger och ett ägg över.* I detta kapitel handlar det om division för rationella tal. Alla rationella tal kan divideras, kvoten är alltid ett rationellt tal.
Likheten $13 \div 4 = \frac{13}{4}$ motiverar/förklarar användandet av bråkstrecket som divisionssymbol.

Det är ofta praktiskt och bekvämt att använda bråkstrecket som divisionssymbol. Det gäller bara att veta vad $\frac{a}{b}$ betyder. Är det ett bråk*tal* alltså ett rationellt tal, eller är det ett *bråk* alltså en division? $\frac{3}{4}$ är ett rationellt tal, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ är ett bråk men inte ett rationellt tal.

Ibland orskar användningen av bråkstreck som divisionssymbol felläsning/feltolkning:
Vi har att $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \cdot c}$ men $a \div \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$. Därför är det viktigt att veta vad som avses då man använder ”dubbelbråk”. Att $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ och $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ inte är samma sak, syns lätt i tryckt text, men inte lika lätt i handskriven text. Här rekommenderas därför att man använder annan divisionssymbol $\div$ eller $/$ eller förtydligande parenteser.

Tänk också på att ett dubbelbråk ofta innehåller ”osynliga parenteser”, vilket illustreras i nästa exempel.

Exempel. Vi skall skriva $\frac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}}$ som ett bråktal på enklaste form.

Lösning. $\frac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}} = \left(\frac{1}{7}-\frac{3}{11}\right) \div \left(\frac{2}{63}+\frac{11}{18}\right) =$

$$\left(\frac{1\cdot 11}{7\cdot 11}-\frac{3\cdot 7}{11\cdot 7}\right) \div \left(\frac{2\cdot 2}{7\cdot 9\cdot 2}+\frac{11\cdot 7}{2\cdot 9\cdot 7}\right) = \left(\frac{11-21}{11\cdot 7}\right) \div \left(\frac{4+77}{2\cdot 9\cdot 7}\right) =$$

$$\frac{{}^{-}10\cdot 2\cdot 9\cdot 7}{11\cdot 7\cdot 81} = {}^{-}\frac{20}{99}$$ □

1.2.3 Räkneregler

Här sammanfattas de räkneregler som gäller för rationella tal. De som tidigare behandlats för heltalen gäller även för de rationella talen.

Räkneregler

För alla rationella tal, $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a}{d\cdot b}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
- $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

1.2.4 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1b

1.2.1 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\frac{5040}{40320}$ b) $\frac{6182}{{}^{-}616}$ c) $\frac{{}^{-}42\cdot 308\cdot 230}{{}^{-}60\cdot 121\cdot {}^{-}69}$

d) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$ e) $3\frac{1}{4}+2\frac{5}{6}+4\frac{3}{8}$ f) $2\frac{15}{17}-3\frac{1}{5}+1\frac{2}{3}$

1.2.2 Skriv följande rationella tal på enklaste form och blandad form

a) $\frac{1}{4}-\left(1\frac{1}{3}-2\frac{1}{6}\right)$

b) $2\frac{1}{4}-3\frac{1}{5}-\left(4\frac{11}{21}-3\frac{5}{7}\right)+\left(3\frac{1}{5}-1\frac{7}{15}\right)$

1.2.3 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\frac{1}{7}\div\frac{4}{7}$ b) $\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{24}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{38}{17}$

c) $2\frac{1}{6}\cdot 3\frac{3}{4}\div 4\frac{7}{12}$ d) ${}^{-}11\frac{1}{3}\cdot 2\frac{2}{5}\div {}^{-}1\frac{2}{15}$

e) $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20}\right)\div\left(\frac{9}{100}\cdot\frac{5}{19}\right)$ f) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20}\div\frac{9}{100}\cdot\frac{5}{19}$

g) $\left(\frac{77}{8}\div\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{24}{13}\div\frac{6}{11}\right)$ h) $\frac{77}{8}\div\frac{4}{3}\div\frac{24}{13}\div\frac{6}{11}$

1.2.4 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)$ b) $\dfrac{3\frac{5}{6}-2\frac{7}{8}}{4\frac{5}{11}-3\frac{1}{6}}$

c) $\dfrac{3\frac{1}{4}-2\frac{7}{12}}{1\frac{1}{5}-\frac{2}{7}}-\dfrac{1\frac{2}{11}-\frac{8}{9}}{\frac{23}{99}}\cdot 1\frac{5}{41}$

1.3 Potenser med heltalsexponent

1.3.1 Potenser

I detta kapitel introduceras begreppet potens för rationella tal, och därmed naturligtvis för alla heltal. Exponenten är här heltal men längre fram (i kapitel 1.7) kommer exponenten att vara ett rationellt tal och slutligen ett reellt tal. De räknelagar som presenteras i kapitlet är allmängiltiga, de gäller även med reella exponenter.

1.3.2 Potens med heltalsexponent

Potenser med *heltalsexponenter* definieras av

$a^0 = 1 \quad (\text{för } a \neq 0), \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a,$
$a^n = a \cdot a^{n-1} = a \cdot a \cdots a, \quad (\text{produkten av } n \text{ faktorer då } n \text{ är ett positivt heltal.})$

Vidare definierar man $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ då n är ett positivt heltal och $a > 0$.

I definitionen ovan kan n bara vara ett heltal men a kan vara såväl ett heltal som ett rationellt tal.

Vid beräkning av potenser av negativa tal får man vara extra uppmärksam. De beräknas naturligtvis på samma sätt som potenser av positiva tal. ${}^-3^4 = {}^-3 \cdot {}^-3 \cdot {}^-3 \cdot {}^-3$. Men risken för felläsning är stor varför det är klokt att alltid skriva parentes runt talet: ${}^-3^4 = ({}^-3)^4$ så att det inte förväxlas med ${}^-(3^4)$.

Då $({}^-1)^2 = 1$, gäller att: $({}^-a)^1 = {}^-a$, $({}^-a)^2 = a^2$, $({}^-a)^3 = {}^-(a^3)$ och allmänt

$$({}^-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{om} \quad n = 2m = \text{jämnt heltal} \\ {}^-(a^n) & \text{om} \quad n = 2m + 1 = \text{udda heltal.} \end{cases}$$

För potenser av bråktal gäller att $\left(\dfrac{p}{q}\right)^n = \dfrac{p^n}{q^n}$. Också i detta fall är det klokt att använda förtydligande parenteser. Det är annars lätt att uppfatta det som $\dfrac{p^n}{q}$.

Följande potenslagar kan härledas om man skriver upp vad de olika potenserna är. T.ex är $(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3 \cdot 4}$.

1.3.3 Räkneregler

Potensregler

För alla tal a och b gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Vid räkning med potenser gäller prioritetsregeln att potenser beräknas före multiplikation eller division och även före addition eller subtraktion. $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$, $2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$. Som tidigare skall operation inom parenteser beräknas först: $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$, $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$.

Vid upprepad potensberäkning, som i : 2^{3^3}, gäller att exponenten beräknas först:

$2^{3^3} = 2^{(3^3)} = 2^{27} = 134217728, \quad 2^{5+3} = 2^{(5+3)} = 2^8 = 256.$

Också här ger parenteser förtur: $(2^3)^3 = 8^3 = 512$.

En liten **varning!** Det finns ingen standardprioritet för upprepad potensberäkning. Vissa kalkylatorer har ”exponenten först” prioritet, andra har läsriktningsprioritet. 2^{3^3} kan bli antingen 134217728 eller 512, det beror på räknarfabrikatet, ibland t.o.m. på modellen. För säkerhets skull – använd parenteser.

Här är de prioritetsregler som behandlats i kapitlet.

Prioriteringsordning

1. Operation mellan parenteser.
2. Exponent
3. Potens
4. Multiplikation och division
5. Addition och subtraktion
6. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

1.3.4 Övningar

1.3.1 Beräkna

a) 5^2 b) 2^5 c) $(^-3)^4$ d) $(^-4)^3$

e) 1^{100} f) 100^1 g) 3^0 h) $(^-3)^0$

1.3.2 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a) 2^{-2} b) $(^{-}3)^{-3}$ c) 1^{-5}

1.3.3 Skriv som potenser av 2

a) $1/64$ b) $16^3/2^{10}$ c) $128^3/32^5$

1.3.4 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a) $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-7} \cdot 105 \cdot {}^{-}7^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 5}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(^{-}\frac{3}{7}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{10}\right)^{-3}}{56 \cdot 10^{-6}}$

1.4 Reella tal

Det är ganska komplicerat att definiera vad som menas med ett reellt tal. Det kräver mer avancerad matematik än vad som normalt ingår i en gymnasieutbildning. Vi måste därför hålla oss till en relativt intuitiv och förenklad bild av begreppet. Med ett *reellt* tal menas då ett tal r som ges av en *decimalutveckling*, som beskrivs nedan.

Varje positivt reellt tal har en heltalsdel n, som är ett naturligt tal, och en decimaldel: $r = n.a_1a_2a_3a_4a_5\cdots$, där alla talen a_i är naturliga tal mellan 0 och 9. Detta betyder att $r = n + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{100} + \dfrac{a_3}{1000} + \dfrac{a_4}{10000} + \dfrac{a_5}{100000} + \cdots$.
Till varje positivt reellt tal finns ett motsatt, negativt tal
$^{-}r = {}^{-}n.a_1a_2a_3a_4a_5\cdots = {}^{-}\left(n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \frac{a_5}{100000} + \cdots\right)$.

Genom att bara ta med ändligt många decimaler får vi ett rationellt tal som approximerar det reella talet. Ju fler decimaler dess bättre approximation.

Reella tal kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras, genom att man utför operationerna på de rationella approximationerna. Genom att ta med fler och fler decimaler får man en följd av rationella tal som närmar sig (har gränsvärdet) de reella talens summa, differens, produkt eller kvot.

Två decimalutvecklingar representerar samma reella tal om deras differens är 0. Detta innebär att t.ex. $3.25300000\cdots = 3.25299999\cdots$. (De avslutande punkterna innebär som vanligt att mönstret fortsätter obrutet.)

För att åskådliggöra de reella talen använder man ofta punkter på tallinjen. Inte heller detta är helt oproblematiskt. Vad är en linje och vad är en punkt?

Euklides definierade begreppen punkt, linje och plan på ett sätt som, kanske ger rätt associationer, men ändå är väldigt diffust. En *punkt* är något som inte kan delas. En *linje* är en längd utan bredd. En linjes ändar är punkter. En *rät linje* är en linje som ligger jämnt mellan punkterna på densamma. En *yta* är något som bara har längd och bredd. Ett *plan* är en yta som ligger med de räta linjerna på detsamma.

De definitionerna leder inte till att man kan säga vad ett reellt tal är. Endast naturliga tal, positiva bråktal och vissa (geometriskt konstruerbara) reella tal. Man kan alltså inte definiera ett reellt tal som en punkt på tallinjen. Resonemanget är det omvända. När vi har de reella talen kan vi definiera vad som menas med rät linje, punkt och plan. Då motsvarar varje reellt tal en punkt på linjen och varje punkt motsvarar ett reellt tal.

I praktiken räknar vi bara med rationella approximationer till de reella talen, eller med symboler, som $\sqrt{2}$, som representerar specifika reella tal. Redan de gamla grekerna visste att det inte finns rationella tal x sådana att $x^2 = 2,\ 3,\ 5,\ 6$ m.fl. Man kan numera visa att det däremot finns sådana reella tal.

Mängden av alla reella tal betecknas $\mathbb{R}$. De rationella talen är också reella tal, mängden av alla rationella tal är en *delmängd* av mängden av alla reella tal.
Vi har att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.4.1 Olikheter för reella tal

I likhet med heltalen och de rationella talen finns det tre typer av reella tal, de positiva, de negativa och talet 0. Detta gör det möjligt att definiera begreppen *större än* och *mindre än* för reella tal.

Definition
Det reella talet a är *större än* talet b, skrivs $a > b$, om och endast om $a - b$ är positivt.

Talet a är *mindre än* talet b, skrivs $a < b$, om och endast om $a - b$ är negativt.

För alla reella tal a och b finns därmed tre möjligheter: $a = b$, $a > b$ eller $a < b$.

I detta sammanhang har man ofta användning av en praktisk mängdbeskrivning.

Säg till exempel att vi, av någon anledning, är intresserade av alla de reella tal x som uppfyller villkoret $x < 5$. Då gäller det att beskriva denna mängd av tal på ett praktiskt sätt: $\{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$. De speciella parenteserna $\{$ och $\}$ är mängdparenteser, (vardagligt krullparenteser). De inramar beskrivningen av objekten i mängden. $x \in \mathbb{R}$ innebär att alla objekten skall tillhöra mängden av alla reella tal, kort sagt att alla objekt är reella tal. Kolon : läses *sådana att*. Efter kolontecknet kommer villkoret som skall vara uppfyllt för att ett reellt tal x skall få vara med i mängden. I ord läser man alltså: *mängden av alla reella tal x sådana att x är mindre än* 5.

Vi har att ${}^{-}3 \in \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ och $12 \notin \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$. Talet ${}^{-}3$ tillhör mängden, talet 12 tillhör inte mängden.

De positiva reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, de negativa reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ och de *icke-negativa* reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Mängdbeteckningen kommer vi också att använda för andra grundmängder än de reella talen. Man kan t ex skriva $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$ vilket då betyder mängden av alla heltal vars kvadrat är mindre än 5, dvs $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

När det är klart att det är de reella talen som avses så finns det praktiska beteckningar för intervall. Vi kommer att använda följande beteckningar:

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}
\end{aligned}
$$

Observera att '(' respektive ')' betyder att ändpunkten **inte** är med och att '[' respektive ']' betyder att ändpunkten är med.

1.4.2 Räkneregler för olikheter

Också för olikheter gäller vissa räkneregler. De kan alla härledas från definitionen. Vi ger här ett exempel på regel och härledning.

Exempel. Vi skall bevisa olikhetsregeln: *Om a och b är reella tal sådana att $a > b$ så gäller det att $a + c > b + c$ för alla reella tal c.*

Lösning. Vi beräknar differensen $(a + c) - (b + c)$ och skall visa att denna är positiv om $a > b$. Men $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$, som är positiv eftersom $a > b$. Vi har därmed visat att $a + c > b + c$ om $a > b$. $\square$

Räkneregler

För alla reella tal $a,\ b,\ c$ och d, gäller det att

- Om $a < b$ och $b < c$ så gäller $a < c$
- Om $a < b$ så gäller $a + c < b + c$
- Om $a < b$ och $c < d$ så gäller $a + c < b + d$
- Om $a < b$ och $0 < c$ så gäller $a \cdot c < b \cdot c$
- Om $a < b$ och $c < 0$ så gäller $a \cdot c > b \cdot c$

1.4.3 Övningar

1.4.1 Gäller det att

a) $2 \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$?   b) $2 \leq 3$?

(Symbolen $\leq$ utläses *mindre än eller lika med*. Talet 3 är med i mängden.)

c) Är det någon skillnad på utsagorna i (a) och (b) ovan?

1.4.2 Visa att räknereglerna för olikheter i avsnitt 1.4.2 gäller genom att använda metoden som presenteras i exemplet i samma avsnitt.

1.4.3 Ge exempel på reella tal $a,\ b,\ c$ och d sådana att
$a < b$ och $c < d$ men där $a - c < b - d$ *inte* gäller.

1.5 Absolutbelopp

I detta kapitel skall vi arbeta med en av grundläggande operationerna på reella tal, absolutbelopp. Detta återkommer i kapitel **??** då vi studerar funktioner.

Definition: Om a är ett reellt tal så är *absolutbeloppet* av a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om} \quad a \geq 0 \\ {}^{-}a & \text{om} \quad a < 0 \end{cases}$$

Tänk på att ${}^{-}a$ är det motsatta talet till a. Om a är negativt så är ${}^{-}a$ positivt. Som exempel är $|{}^{-}3| = {}^{-}({}^{-}3) = 3$

Av definitionen följer direkt att $|a| \geq 0$ för alla reella tal a. Absolutbeloppet av a talar om hur långt från punkten 0 som punkten a ligger på tallinjen.

Om a och b är två reella tal så är $|a - b|$ avståndet mellan a och b på tallinjen. Vi har t.ex. att ${}^{-}7$ och 3 ligger på avståndet 10 från varandra, $|{}^{-}7 - 3| = |{}^{-}10| = 10$.

Exempel. Vi söker de tal b som uppfyller $|3 - b| = 5$.

Lösning. Vi söker de punkter på tallinjen, som ligger på avståndet 5 från 3. Det är två punkter, en till höger om 3, nämligen $3 + 5 = 8$, och en till vänster, $3 - 5 = {}^{-}2$. $\square$

Exempel. Vi söker de tal b som uppfyller $|3 - b| \leq 5$.

Lösning. Nu söker vi de punkter på tallinjen, som ligger på avstånd *högst* 5 från 3. Det är alla punkter som ligger *mellan* 3 och $3 + 5 = 8$, eller *mellan* 3 och $3 - 5 = {}^{-}2$. Alltså alla punkter mellan ${}^{-}2$ och 8.

Med mängdskrivsättet har vi $\{x \in \mathbb{R} : |3 - b| \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : {}^{-}2 \leq x$ och $x \leq 8\}$.

Ett alternativt sätt att skriva ${}^{-}2 \leq x$ och $x \leq 8$ är ${}^{-}2 \leq x \leq 8$. $\square$

1.5.1 Övningar

1.5.1 Bestäm

a) $|7|$ b) $|{}^{-}7|$ c) $|0|$

1.5.2 Bestäm alla reella tal x sådana att

a) $|x + 1| = 1$ b) $|3 - x| = 7,5$ c) $|x + 4| = 0$

d) $|3 - 2x| = 5$ e) $|x - 2| = {}^{-}2$

1.5.3 Ange (utan beloppstecken) de x, som satisfierar

a) $|x - 1| \leq 2$ b) $|x + 3| < 5$ c) $2 < |x - 2| \leq 3$

d) $|x + 2| \leq 0$

1.6 Kvadratrötter

Vi fortsätter nu med den andra av de grundläggande operationerna på reella tal, kvadratroten. Också till denna återkommer vi i kapitel **??** då vi studerar funktioner.

1.6.1 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom produkten av såväl två positiva tal, som två negativa tal, är positiv så gäller det att

$x^2 = x \cdot x \geq 0$ för alla reella tal x.

Alltså har ekvationen $x^2 = b$ ingen reell lösning om $b < 0$.

I avsnitt 1.4 behandlades svårigheterna med att avgöra huruvida det talsystem man arbetar med räcker till för att lösa en viss ekvation. Men som påpekades där så har ekvationen $x^2 = b$ alltid reell lösning om $b > 0$. I själva verket alltid två. Som exempel har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna 3 och $^-3$.

Definition: Med $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b.

Alltså är $\sqrt{9} = 3$ och inte $^-3$ eller ± 3. Det gäller också att $\sqrt{0} = 0$.

Enligt definitionen har vi alltså att $(\sqrt{b})^2 = b$.

Men det gäller också att $(^-\sqrt{b})^2 = {}^-\sqrt{b} \cdot {}^-\sqrt{b} = (\sqrt{b})^2 = b$.

Alltså gäller det att:

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika reella rötter: $\sqrt{b}$ och $^-\sqrt{b}$

Man skriver ibland $x^2 = b \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, för $b \geq 0$. Med detta menas alltså att ekvationen har rötterna $x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = {}^-\sqrt{b}$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 9$ har således rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, d.v.s. $x_1 = 3$ och $x_2 = {}^-3$. □

1.6.2 Räkneregler

Av definitionen på $\sqrt{b}$ följer vissa **räkneregler**:

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ för $a \geq 0$.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a

  alltså: $\sqrt{a^2} = a$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2} = {}^{-}a$ om $a < 0$.
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$ och alla a.

  alltså: $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2 \cdot b} = {}^{-}a \cdot \sqrt{b}$ om $a < 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, om $a > 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ $a \neq b$, a, $b > 0$.

Den första punkten följer direkt av definitionen:
$\sqrt{a}$ *är* det icke negativa tal vars kvadrat är a.

Punkt två kan bevisas genom att vi konstaterar att $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ och att $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$.

Alltså är $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

På samma sätt bevisas regeln för roten ur en kvot och de två efterföljande reglerna.

Den femte regeln följer av $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

De två sista reglerna kallas **förlängning med konjugatuttryck** eftersom $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ och $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ kallas konjugatuttryck till varandra.

Den första av av dem följer av $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} =$

(konjugatregeln se avsnitt 1.9) $= \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ för $a \neq b$, a och $b > 0$.

OBS: I allmänhet, alltså för de flesta tal a och b, är $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Till exempel ger $a = b = 1$ att $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$ medan $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$.

På samma sätt är i allmänhet $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Exempel.

(a) Ekvationen $4x^2 - 3 = 0$, d.v.s. $x^2 = 3/4$ har rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{3/4} = \pm\sqrt{3}/2$

(b) $\sqrt{(^-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = |^-3|$

(c) För $a > 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$

(d) För $a < 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{b} = {}^-(^-a)\sqrt{b} = {}^-\sqrt{(^-a)^2 \cdot b} = {}^-\sqrt{a^2 \cdot b}$

(e) För $a > 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$

(f) För $a < 0, b < 0$ är $a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = {}^-(^-a)\sqrt{\frac{b}{a}} = {}^-\sqrt{(^-a)^2 \cdot \frac{b}{a}} = {}^-\sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = {}^-\sqrt{ab}$

(g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(h) Vi skriver $\dfrac{1}{5+\sqrt{6}}$ med heltalsnämnare.

Lösning. Multiplicera med konjugatuttrycket:

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}} = \frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5-\sqrt{6}}{25-6} = \frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

□

1.6.3 Övningar

1.6.1 Förenkla

a) $\sqrt{0,49}$ b) $\sqrt{90000}$ c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{75}$ d) $\sqrt{10}/\sqrt{125}$

e) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ f) $\sqrt{2} - \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16} - \sqrt{32} + \sqrt{64}$.

1.6.2 Lös ekvationen

a) $x^2 - 25 = 0$ b) $5 - x^2 = 0$ c) $9x^2 - 4 = 0$ d) $16 - 6x^2 = 0$

e) $x^2 = 0$

1.6.3 Skriv med heltalsnämnare

a) $2/\sqrt{6}$ b) $3/\sqrt{21}$ c) $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

d) $2/(\sqrt{11}-3)$ e) $1/(2-\sqrt{5})$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

1.7 n:te roten ur ett reellt tal

Man kan visa att, om $b \geq 0$ och n är ett positivt heltal, så finns, i likhet med fallet $n = 2$, precis ett icke-negativt tal a så att $a^n = b$. Om n är ett jämnt tal så gäller också att $(^-a)^n = b$. Om n är ett udda tal så gäller istället att $(^-a)^n = {}^-b$. Detta leder till följande definition av n-te roten ur ett icke-negativt tal.

1.7.1 n-te roten ur reella tal

Definition: Om n är ett positivt heltal och b är ett reellt tal ≥ 0, så menas med $\sqrt[n]{b}$ det rella tal ≥ 0, som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Om b är ett negativt tal och n är ett positivt, udda heltal så menas med $\sqrt[n]{b}$ det *negativa* tal som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Ekvationen $x^n = b$, där b reellt tal och n är ett positivt heltal, har då följande *reella rötter*:

1) $x = \sqrt[n]{b}$, om $n = 2m + 1 =$ *udda* (positivt) heltal,

2) $x = \pm\sqrt[n]{b}$, om $b \geq 0$ och $n = 2m =$ *jämnt* (positivt) heltal.

(Om n är *jämnt* och $b < 0$, så saknar $x^n = b$ reella rötter och $\sqrt[n]{b}$ är *inte* definierat.)

För *udda* $n = 1, 3, 5, \ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{^-b} = {}^-\sqrt[n]{b}$.

Definitionen äv $\sqrt[n]{b}$ gäller även för $n = 1$, vi har då att $\sqrt[1]{b} = b$ för alla reella tal b.

Exempel.

Eftersom $2^4 = 16$ och $5^3 = 125$ så är $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{125} = 5$ och $\sqrt[3]{^-125} = {}^-5$. □

1.7.2 Räkneregler

Följande *räkneregler* för *n:te rötter* bevisas på samma sätt som motsvarande regler för kvadratroten.

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ för $a \geq 0$ om n är jämnt, för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ om n är jämnt.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ och $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Exempel.

(a) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6 \cdot 3]{2} = \sqrt[18]{2}$

(b) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt[4]{5}$

(c) $\sqrt[2n]{a^2} = \sqrt[n]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[n]{|a|}$ □

För uttrycken $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a+b}$ och $\sqrt[n]{a-b}$ finns inga allmänna formler. Exempelvis är i allmänhet $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

1.7.3 Övningar

1.7.1 Förenkla

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt[6]{8}$ c) $\sqrt[3]{-24}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ e) $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$

g) $4/\sqrt[3]{16}$ h) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.7.2 Bestäm de *reella* rötterna till

a) $x^8 = 16$ b) $x^5 = 243$ c) $64x^6 - 27 = 0$

d) $x^3 + 8 = 0$ e) $x^4 + 8 = 0$

1.7.3 Förenkla:

a) $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$ b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ e) $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ f) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.8 Potenser med rationell exponent

I detta kapitel definieras vad som menas med en potens med rationell exponent. Definitionen bygger både på potens med heltalsexponent (kapitel 1.3) och på definitionen av n-te roten som gjordes i föregående kapitel.

1.8.1 Potenser med rationell exponent

Definition:
Om $\dfrac{m}{n}$ är ett rationellt tal och b är ett icke-negativt reellt tal så ges $b^{\frac{m}{n}}$ av:
$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$.

Speciellt är $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$. Exempelvis gäller för den vanliga *kvadratroten*, att $\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{1/2}$.

Vi har också att $b^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{b^m} = b^m$ (om inte detta gällt hade definitionen varit misslyckad).

Om n är ett udda heltal så är $\sqrt[n]{b}$ definierat även för $b < 0$. Man använder därför ofta skrivsättet $b^{\frac{1}{n}}$ för udda n även då $b < 0$. Här krävs stor försiktighet. Man måste vara medveten om att definitionen $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ endast gäller för $b \geq 0$.

Vi har att $\left({}^{-}27\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = {}^{-}3$.

Men vi har också att $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$. Om man då tillämpar definitionen av $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ med $b = {}^{-}27$ får man *ett felaktigt resultat* $\left({}^{-}27\right)^{\frac{1}{3}} = \left({}^{-}27\right)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\left({}^{-}27\right)^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

1.8.2 Räkneregler

Med hjälp av räknereglerna för n:te roten ur ett positivt tal och räknereglerna för potenser med heltalsexponent kan man visa att *potensuttrycket* $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent

$x = \dfrac{m}{n}$ för $b > 0$ satisfierar samma *potenslagar* som potens med heltalsexponent (se avsnitt 1.3.3).

Potensregler

För alla positiva reella tal a och b och alla rationella tal x och y gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$, om $b > 0$.
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Exempel.

(a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

(b) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{1/3})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

(c) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

$\square$

1.8.3 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1c

1.8.1 Förenkla

a) $27^{1/3}$ b) $4^{-0,5}$ c) $(\sqrt{8})^{2/3}$

d) $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$ e) $3^{1/2}/9^{-3/4}$ f) $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$

g) $(0,0016)^{-0,25}$

1.8.2 Förenkla *a)* $\sqrt[6]{9}$ *b)* $\sqrt[6]{8}$ *c)* $\sqrt[3]{-24}$ *d)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ *e)* $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$ *g)* $4/\sqrt[3]{16}$ *h)* $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.8.3 Förenkla: *a)* $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$

b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ *c)* $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$ *d)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ *e)* $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ *f)* $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.9 Algebraiska omskrivningar

Oerhört många resonemang, i såväl matematik som andra sammanhang där matematiken tillämpas, bygger på omskrivningar av matematiska uttryck. Ofta handlar det om att förenkla uttrycket, men minst lika ofta gäller det att skriva uttrycket på den mest lämpade formen. Vilken denna form är beror naturligtvis på situationen.

Vid algebraiska omformningar får man utnyttja alla de räkneregler som gäller vid räkning med reella tal. Man bör därför vara synnerligen väl förtrogen med dessa. Speciellt de som behandlats i samband med heltal 1.1.3, rationella tal 1.2.3 och potenser 1.8.2.

Det finns ett mycket vanligt sätt att skriva produkter då variabler är inblandade. $6 \cdot a$ skrivs ofta $6a$, $a \cdot b \cdot c$ skrivs abc osv. Då man utelämnar multiplikationssymbolen måste man vara säker på att detta inte orsakar missuppfattning, abc kan mycket väl vara *en* variabel istället för produkt av tre. Hur skall $2m + 10cm$ tolkas? Betyder det $210cm$ eller $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m = 2 \cdot (1 + 10 \cdot c) \cdot m$? Det beror helt på sammanhanget. I detta kapitel skall abc tolkas $a \cdot b \cdot c$ och $2m + 10cm$ betyder $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$.

Exempel. Med de vanliga räknereglerna kan man förenkla en del algebraiska uttryck.

a) $10m-9y+5y+7m+4y-m = (10+7-1)m+(^-9+5+4)y = 16m+0\cdot y = 16m$

b) $m-[a-b-(c-m)] = m-[a-b-c+m] = m-a+b+c-m = b+c-a$

c) $3abc \cdot a^3bc^2 \cdot {}^-(4b^2) = 3 \cdot (^-4) \cdot a \cdot a^3 \cdot b \cdot b \cdot b^2 \cdot c \cdot c^2 = {}^-12a^4b^4c^3$

d) $(3x^2y^3z)^4 = 3^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 \cdot z^4 = 81x^8y^{12}z^4$

e) $(2x+3)(4x^2-6x+9) = 2x \cdot (4x^2-6x+9) + 3 \cdot (4x^2-6x+9) =$
$2x \cdot 4x^2 - 2x \cdot 6x + 2x \cdot 9 + 3 \cdot 4x^2 - 3 \cdot 6x + 3 \cdot 9 =$
$8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27 = 8x^3 + 27$

□

1.9.1 Några viktiga algebraiska identiteter

Utöver räknereglerna finns det en hel del samband som man behöver kunna använda. De flesta är sådana att man behöver kunna dem *aktivt*. Det räcker inte att veta att de finns och kunna slå upp dem i en formelsamling. För att kunna räkna ”med flyt” krävs en hel del utantillkunskap.

Följande viktiga identiteter behöver man kunna utantill:

kvadreringsreglerna:	$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$
kuberingsreglerna:	$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$
konjugatregeln:	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$
faktoruppdelningarna:	$\begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$

Exempel.

a) $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529.$

b) $29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 841.$

c) $37^2 - 33^2 = (37-33) \cdot (37+33) = 4 \cdot 70 = 280$

$\square$

OBS: $a^2 + b^2$ (liksom $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$) kan <u>ej</u> faktoruppdelas (med reella tal).

En generalisering av formeln för $a^3 - b^3$ är *allmänna konjugatregeln*.

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})}$$

som visas genom ihopmultiplicering av parenteserna i högra ledet.

Exempel.

a) $(3a+4b)^2 =$ (kvadreringsregeln) $= (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$

b) $(3+x^2)(x^2-3) = (x^2+3)(x^2-3) =$ (konjugatregeln) $= (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$

c) $(x-2y)^3 =$ (kuberingsregeln) $= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 =$
$x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

d) Faktoruppdelning: $4x^2 - 9a^4 = (2x)^2 - (3a^2)^2 =$ (konjugatregeln) $=$
$= (2x + 3a^2)(2x - 3a^2)$

e) Faktoruppdelning: $12x^4 - 2x^5 - 18x^3 =$ (alla gemensamma faktorer brytes ut) $=$

$= 2x^3 \cdot (6x - x^2 - 9) = -2x^3(x^2 - 6x + 9) =$ (kvadreringsregeln) $= -2x^3 \cdot (x-3)^2$

f) Faktoruppdelning: $x^4 + 8xy^6 = x \cdot (x^3 + 8y^6) = x \cdot [x^3 + (2y^2)^3] =$
$=$ (enligt formeln för $a^3 + b^3$) $= x \cdot (x + 2y^2)[x^2 - x \cdot 2y^2 + (2y^2)^2] =$
$= x \cdot (x + 2y^2)(x^2 - 2xy^2 + 4y^4)$ □

1.9.2 Pascals triangel och $(a+b)^n$

Koefficienterna i utvecklingen av $(a+b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$n = 0$						1						
1					1		1					
2				1		2		1				
3			1		3		3		1			
4		1		4		6		4		1		
5	1		5		10		10		5		1	
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o.s.v.

Den sista raden innebär att $(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$

Ett tal i triangeln erhålles genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför. För att inse att detta ger koefficienterna i utvecklingen kan vi se på $(a+b)^4$. Vi har ju att $(a+b)^4 = (a+b) \cdot (a+b)^3$. Men $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Alltså är $(a+b)^4 = a \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$. Man får en term a^3b ur båda produkterna, dels $b \cdot a^3$, dels $a \cdot 3a^2b$. Koefficienten för a^3b är summan av koefficienterna för a^3 och a^2b.

På samma sätt fungerar det för alla övriga termer också.

Exempel.

a) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

b) $(a-b)^4 = (a + {}^-b)^4 = a^4 + 4a^3({}^-b) + 6a^2({}^-b)^2 + 4a({}^-b)^3 + ({}^-b)^4 =$
$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

c) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

□

1.9.3 Rationella uttryck

Räkning med rationella uttryck följer samma räkneregler som räkning med rationella tal. Vid addition är det lämpligt att förlänga med ”så lite som möjligt”. Man bestämmer i så fall minsta gemensamma nämnare i stället för att ”multiplicera korsvis”. För att bestämma minsta gemensamma nämnare behöver man faktoruppdela de olika termernas nämnare. I detta kapitel med hjälp av kvadrerings- kuberings- eller konjugatreglerna, senare även med hjälp av faktorsatsen och polynomdivision.

Exempel.

a) $\dfrac{b-a}{c} = \dfrac{^-(a-b)}{c} = {}^-\left(\dfrac{a-b}{c}\right)$, varav följer att

$$\frac{b-a}{a^2-b^2} = {}^-\left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = {}^-\left(\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}\right) = {}^-\left(\frac{1}{a+b}\right)$$

b) $\dfrac{30x^4y^7}{12xy^{10}} = \dfrac{2\cdot 3\cdot 5\cdot x^{4-1}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot y^{10-7}} = \dfrac{5x^3}{2y^3} = 2.5\cdot x^3\cdot y^{-3}$

c) $\dfrac{x-y}{xy-x^2} = \dfrac{x-y}{x(y-x)} = {}^-\left(\dfrac{y-x}{x(y-x)}\right) = {}^-\dfrac{1}{x}$

d) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right) \div \left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a^2}\right) = \dfrac{(a^2+b^2+2ab)}{ab} \div \dfrac{(a^2-b^2)}{a^2b} =$

$$\frac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)} = \frac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)a}{a-b}$$

e) $\dfrac{5}{2x-2} - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{3x+1}{1-x^2} =$ (faktoruppdela nämnarna) $=$

$$\frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{3x} - \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)} =$$

$\{$ minsta gemensamma nämnare är $2\cdot 3\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\}$

$$= \frac{5\cdot 3x(x+1)}{2(x-1)\cdot 3x(x+1)} - \frac{1\cdot 2(x+1)(x-1)}{3x\cdot 2(x+1)(x-1)} - \frac{(3x+1)\cdot 2\cdot 3x}{(x+1)(x-1)\cdot 2\cdot 3x} =$$

$$\frac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot 3\cdot x(x+1)(x-1)} = \frac{^-5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)} =$$

$${}^-\left(\frac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}\right)$$

$\square$

1.9.4 Rotuttryck

Vid omskrivning av rotuttryck kan man givetvis använda alla de räkneregler som gäller för reella tal. Det man speciellt skall tänka på är $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exempel.

a) $\dfrac{3-c}{\sqrt{c-3}} = {}^-\dfrac{c-3}{\sqrt{c-3}} = {}^-\dfrac{\left(\sqrt{c-3}\,\right)^2}{c-3} = {}^-\sqrt{c-3}$ om $c > 3$.

OBS: $\sqrt{c-3}$ är definierat om $c - 3 \geq 0$, d.v.s. om $c \geq 3$, men $1/\sqrt{c-3}$ är definierat endast om $c > 3$.

b) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+a^3}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2(1+a)}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1+a}} =$

$\dfrac{a}{|a|\,\sqrt{1+a}} = \begin{cases} 1/\sqrt{1+a} & \text{om} \quad a > 0 \\ -1/\sqrt{1+a} & \text{om} \quad -1 < a < 0. \end{cases}$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck!

□

1.9.5 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1d

1.9.1 Förenkla

a) $10t - 14u + 7v - t - 8v + 14u - 8v - u$

b) $70a + 20c + 33x + c - x - 28a - 40a - 9c + 41x$

1.9.2 Förenkla

a) $m + 2p - (m + p - r)$ b) $3c - (2a + c - 5b) - (2b - 2a)$

c) $7a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)]$

1.9.3 Förenkla

a) $2xz^7 \cdot 10xz$ b) $a^2b^4c \cdot ({}^-3ac^2) \cdot 9abc$

c) ${}^-2p^2qr \cdot pq^7s^2 \cdot ({}^-7qr^3)$

1.9.4 Förenkla

a) $(3x^2y)^3$ b) $(4ab^2c^3)^2(^-2a^2b)^3$ c) $(a^2)^p \cdot (a^pb^{3p})^2 \cdot b^p$

1.9.5 Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

a) $(2x - y)(x + 2y)$ b) $(2x - y)(x + 2y)(x - y)$

c) $(a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)$

d) $(x^2 - 2x + 3)(2 - 3x - 2x^2)$

1.9.6 Utveckla

a) $(3a - 4b)^2$ b) $(a^3 + 2b^2)^2$

c) $(m^4 + 4)^2 + (m^4 - 4)^2$

1.9.7 Förenkla

a) $(6 - x)(x + 6)$ b) $(a^2 + y)(a^2 - y)$

c) $(x^3 + 3)(x^3 - 3)(x^6 + 9)$

1.9.8 Utveckla

a) $(y + 3x)^3$ b) $(3x + 2y^2)^3$ c) $(x^4 - 6x)^3$

1.9.9 Uppdela i faktorer

a) $x^2 - a^4$ b) $9x^4 - 25x^2$

c) $18x + 81 + x^2$ d) $x^4y + 4x^2y^3 - 4x^3y^2$

e) $x^4 - x$ f) $3a^3 + 81b^3$

g) $x^2 - x^6$ h) $54x^2y^7 - 16x^5y$

1.9.10 Utveckla

a) $(x - 1)^5$ b) $(1 - y)^7$ c) $(2x + a^2)^5$ d) $(xy^2 - 3z)^6$

1.9.11 Förenkla

a) $\dfrac{6a^7b^3c}{16ab^3c^3}$ b) $\dfrac{32x^ny^p}{36x^{n+1}y^{p-1}}$

c) $\dfrac{2ay+y^2}{2ay}$ d) $\dfrac{12x^2y^2+20xy^2-8x^2y}{4xy}$

1.9.12 Förenkla

a) $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ b) $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$

c) $(x-y)^3/(y-x)^5$ d) $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$

e) $(a^3-b^3)/(b-a)^2$ f) $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$

g) $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

1.9.13 Förkorta (om möjligt)

a) $(a^3+b^3)/(a+b)$ b) $(a^4-b^4)/(a-b)$

c) $(a^4+b^4)/(a+b)$ d) $(a^5-b^5)/(b-a)$

1.9.14 Förenkla

a) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y^2}{x}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}\right)$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x+y}{x-y}-2+\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

d) $\left(\dfrac{1/a}{b}-\dfrac{1/b}{a}+\dfrac{1}{2b/a}+\dfrac{2}{a/b}\right)\div\left(\dfrac{a^2+4b^2}{ab}\right)$

1.9.15 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

a) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}$ b) $1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2-4x}$

c) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{1-x^2}$ d) $\dfrac{1}{x^3-8}+\dfrac{1}{2x^2-8}+\dfrac{1}{8-4x}$

1.9.16 Förenkla och avgör för vilka värden på c som likheten gäller.

a) $\sqrt{c^2+4c+4}$ b) $c/\sqrt{c^2}$ c) $(\sqrt{c})^2/c$

d) $(c^2-9c)/\sqrt{9-c}$ e) $c/\sqrt{c^3-2c^2}$ f) $\sqrt{c^3+2c^2}/c$

2 Ekvationer

I det här avsnittet ska vi bara diskutera vad en ekvation är och hur den kan dyka upp vid problemlösning. Vi ska inte alls oroa oss för hur man löser dem. Det kommer i de följande avsnitten.

En ekvation är helt enkelt en likhet som innehåller en eller eventuellt flera obekanta variabler. Vi tar några enkla exempel.

Exempel. Likheten $21 - x = x - 3$ är en ekvation med en obekant x. Om det är en enda obekant i ekvationen så brukar man ofta av tradition använda bokstaven x, men det går lika bra med vilken bokstav (symbol) som helst. Likheten $g^2 - g = 1$ är en ekvation med en obekant som heter g.

Det är vanligt också med ekvationer med flera obekanta. Likheten $3x + 2y = 31$ är en ekvation som innehåller två obekanta x och y. $\square$

Vad ska man då ha ekvationer till? En ekvation använder man till att beskriva ett samband som innehåller någonting som är obekant och som man önskar räkna ut vad det är. Vi tar en titt på några exempel på problem som man kan ha nytta av en ekvation för att lösa.

Exempel. Kal har en storasyster som heter Ada. Skillnaden på dem i ålder är lika många år som Kal fyllde för 3 år sedan. Ada är 21 år gammal. Hur gammal är Kal?

Lösning. Vi betecknar Kals nuvarande ålder med x. Skillnaden mellan deras ålder är då $21 - x$ och för 3 år sedan fyllde Kal $x - 3$. En ekvation som beskriver sambandet är alltså $21 - x = x - 3$. $\square$

Exempel. Vi söker nu ett tal med den magiska egenskapen att om man ifrån kvadraten av talet subtraherar talet själv så får man exakt 1. Vilket är talet?

Lösning. Vi betecknar det okända talet med g. Subtrahera talet själv ifrån kvadraten av talet är $g^2 - g$ och detta skulle bli 1. Alltså får vi ekvationen $g^2 - g = 1$. $\square$

Exempel. Beda är i godisaffären för att köpa lördagsgodis. Hon köper 3 likadana chokladkakor och 2 likadana tablettaskar. Hon betalar 31 kronor. Hur mycket kostar chokladkakorna respektive tablettaskarna per styck?

Lösning. Vi betecknar priset på chokladkakan med x och priset på en tablettask med y. Det totala priset på Bedas lördagsgodis blir då $3x + 2y$. Hon betalade 31 kronor så vi får alltså ekvationen $3x + 2y = 31$. $\square$

2.1 Förstagradsekvationer

Vi ska nu börja titta på hur man löser ekvationer. Det är viktigt att veta vad man får göra med en ekvation och vad man inte får göra. I det här avsnittet behöver vi bara 3 grundläggande regler. Det är tillåtet att: (1) addera eller subtrahera samma sak från båda sidor av likheten, (2) multiplicera eller dividera båda sidorna med något som inte är 0 samt (3) förenkla de två sidorna av likheten var för sig. Alla dessa tre operationer leder till en ekvivalent ekvation, dvs man ändrar inte på lösningarna till ekvationen.

Vi börjar med den allra enklaste typen av ekvationer, så kallade linjära ekvationer. Man säger att en ekvation är linjär om det är så att det enda man gjort med de obekanta är att man multiplicerat dem med ett tal och sedan adderat eller subtraherat de olika termerna med varandra och med tal.

Exempel. Ekvationen $21 - x = x - 3$ är linjär för den enda obekanta variabeln x har bara adderats och subtraherats med tal. Samma sak för $3x + 2y = 31$ där de två obekanta bara multiplicerats med tal.

Däremot är ekvationen $g^2 - g = 1$ inte linjär då den obekante här har multiplicerats med sig själv. Inte heller ekvationen $xy = 1$ är linjär då man här multiplicerat de två obekanta med varandra. $\square$

Linjära ekvationer är det enklaste som finns att lösa. Vi börjar med att titta på linjära ekvationer med 1 obekant som vi kallar x. Strategin är enkel. Samla alla termer som innehåller x på en sida och alla tal på den andra.

Exempel. Vi löser ekvationen $21 - x = x - 3$:

$$21 - x = x - 3 \iff (21 - x) + x = (x - 3) + x \iff 21 = 2x - 3 \iff$$

$$21 + 3 = (2x - 3) + 3 \iff 24 = 2x \iff \frac{24}{2} = \frac{2x}{2} \iff 12 = x.$$

Här betyder dubbelpilen $\iff$ att ekvationerna är ekvivalenta. Vi ser alltså att ekvationen har en enda lösning, nämligen $x = 12$. (Därmed vet vi alltså att Kal ifrån exemplet i förra avsnittet är 12 år.)

Vi löser nu ekvationen $21 + x = x - 3$:

$$21 + x = x - 3 \iff (21 + x) - x = (x - 3) - x \iff 21 = -3.$$

Här försvann x och kvar fick vi bara orimligheten $21 = -3$. Inget x i världen kan få den likheten att gälla, alltså saknar ekvationen lösning.

Avslutningsvis löser vi ekvationen $12 - (x - 3) = 15 - x$:

$$12 - (x - 3) = 15 - x \iff 12 - x + 3 = 15 - x \iff 15 - x = 15 - x \iff 15 = 15.$$

Denna sista likhet gäller uppenbarligen alltid så till denna ekvation är alla tal en lösning. Den har alltså oändligt många lösningar. $\square$

Vi såg i exemplet att en linjär ekvation med 1 obekant kunde ha 1, 0 eller oändligt många lösningar och detta är faktiskt de enda möjligheterna som finns. Vi ska nu titta på en linjär ekvation med mer är en obekant. Här blir strategin att välja ut en av variablerna att lösa ut (få ensam på ena sidan) på samma sätt som vi gjorde med x ovan.

Exempel. Vi löser ekvationen $3x + 2y = 31$ genom att lösa ut y:

$$3x + 2y = 31 \iff (3x + 2y) - 3x = 31 - 3x \iff 2y = 31 - 3x \iff y = \frac{31 - 3x}{2}.$$

Här ser vi att för varje x vi väljer så får vi precis ett y nämligen $y = (31 - 3x)/2$. Vi får alltså oändligt många par av lösningar. Två möjliga lösningar är t ex $x = 5, y = 8$ eller $x = 6, y = 13/2$.

Denna ekvation var ju den vi hade i förra avsnittet då Beda köpte ett antal chokladkakor och tablettaskar. Vi ser nu när vi löser ekvationen att det inte finns unik lösning och därför räcker inte informationen till att räkna ut vad godiset kostar per styck. $\square$

Om man har en linjär ekvation med mer än 1 obekant så får man alltid oändligt många lösningar (eller ingen lösning alls om alla obekanta försvinner när man förenklar).

2.1.1 Övningar

2.1.1 Lös ekvationerna:

a) $3(2 - x) = -(1 + 2x)$

b) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 10$

c) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 7 - 7x$

d) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 6 - 7x$

2.1.2 Lös ut y i följande ekvationer:

a) $3(2 - x) = -(1 + y)$

b) $3(5 - 3y) - 2(4 - x) = 10 + 2y$

2.2 Andragradsekvationer

Också andragradsekvationer löser man genom att addera eller subtrahera samma tal till båda sidor av ekvationen, multiplicera eller dividera båda leden med tal ($\neq 0$), eller göra omskrivningar.

Den enklaste typen av andragradsekvationer, $x^2 = a$ där a är ett positivt tal, kan man lösa helt utan kalkyler. Vi har ju att $\sqrt{a}$ är det positiva tal vars kvadrat är a, $(\sqrt{a})^2 = a$ om $a > 0$. Eftersom det också gäller att $(-\sqrt{a})^2 = a$ så har ekvationen de två lösningarna $\sqrt{a}$ och $-\sqrt{a}$. Att det inte kan finnas fler lösningarna återkommer vi till i kapitel 2.5.

Ekvationen $x^2 = 9$ har alltså de två lösningarna 3 $(= \sqrt{9})$ och -3.

Exempel. Förhållandet mellan de två sidorna i en rektangel är 2:3. Om kortsidan är 10 m är alltså långsidan 15 m. Vi skall bestämma sidlängderna så arean är 54 m^2.

Lösning. Om kortsidan är $2a$ m så är långsidan $3a$ m och arean $6a^2$ m^2. Alltså skall a vara lösning till $6a^2 = 54$. Division med 6 ger $a^2 = 9$ vars lösningar är 3 och -3. Endast positiva lösningen kan vara relevant så rektangelsidorna är 6 respektive 9 m. $\square$

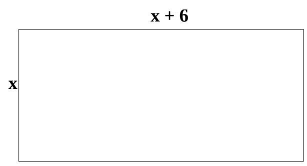
Den näst enklaste typen är $(x-b)^2 = a$ där a är ett positivt tal. Här är $x - b$ ett tal vars kvadrat är a. Då är $x - b = \sqrt{a}$ eller $x - b = -\sqrt{a}$. Lösningarna till $(x-b)^2 = a$ är således $x_1 = b + \sqrt{a}$ och $x_2 = b - \sqrt{a}$.

Exempel. Ekvationen $(x-2)^2 = 9$ har de två lösningarna som ges av $x - 2 = 3$ och $x - 2 = -3$. Således $x_1 = 5$ och $x_2 = -1$. $\square$

Exempel. Långsidan i en rektangel är 6 meter längre än kortsidan. Vi skall bestämma sidlängderna så arean är 55 m^2.

Lösning.

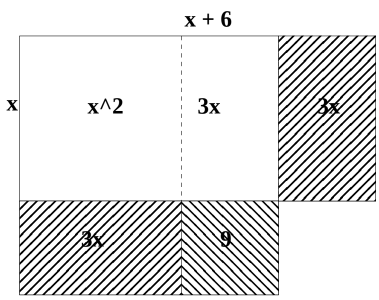
Antag att kortsidan är x m. Då är långsidan $x+6$ m och arean $x(x+6)$ m^2. Vi söker således en lösning till ekvationen $x(x+6) = 55$.



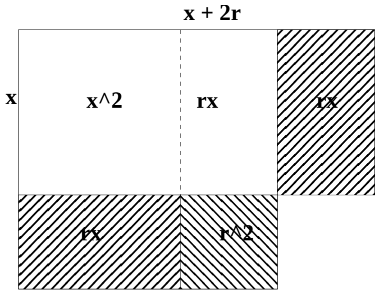
$x(x+6) = 55 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 55$. Genom att addera 9 till vänsterledet $x^2 + 6x$ blir uttrycket en jämn kvadrat: $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = (x+3)^2$.

Addera därför 9 till båda sidor av ekvationen. $x(x+6) = 55 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 55 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 55 + 9 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 64 \Leftrightarrow x + 3 = 8$ eller $x + 3 = -8 \Leftrightarrow x + 3 = 8$ eller $x = -11$. Endast positiv lösning: $x = 5$. Sidorna är 5 respektive 11 m. $\square$

Metoden i exemplet kallas *kvadratkomplettering*: Genom att addera en kvadrat med arean 9 m^2 gör vi om rektangeln till en kvadrat med sidan $x + 3$. Rektangeln har arean 55 m^2, kvadraten har arean 64 m^2.



På samma sätt kan man kvadratkomplettera alla andragradsuttryck: $x^2 + 2rx$ kan ses som arean av en rektangel med sidorna x och $x + 2r$. Genom att addera en kvadrat med sidan r erhåller man en kvadrat med sidan $x + r$.



Man löser alla andragradsekvationer med hjälp av kvadratkomplettering:

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \tfrac{p}{2} \cdot x = -q \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2 \cdot \tfrac{p}{2} \cdot x + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q \Leftrightarrow \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q$$

varför $x + \dfrac{p}{2} = \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$ eller $x + \dfrac{p}{2} = -\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Resultatet ovan har du använt många gånger. Ofta skrivs det med *en* formel: $x = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$. Den är inte så svår att memorera, men minnet blir lätt lite diffust efter ett tag. Därför är det betydligt bättre om du även kan kvadratkomplettera och på det viset komma fram till lösningen utan att använda formeln. Tecknet $\pm$ är praktiskt vid kalkyler men man bör alltid ange de två rötterna separat.

Exempel.

a) Ekvationen $x^2 + 6x + 5 = 0$ har rötterna

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 5} = -3 \pm \sqrt{9 - 5} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2$ d.v.s.

$x_1 = -3 + 2 = -1$ och $x_2 = -3 - 2 = -5$

b) Ekvationen $6 + 3x - 4x^2 = 0$ kan skrivas $x^2 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2} = 0$.

Denna har rötterna

$$x_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9+96}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8} \cdot \sqrt{105}.$$

Således $x_1 = (3 + \sqrt{105})/8$ och $x_2 = (3 - \sqrt{105})/8$.

□

Observera! Det är inte alltid nödvändigt att räkna för att bestämma en ekvations rötter. detta illustreras av följande exempel.

Exempel. Ekvationen $(x-1)(x+3) = 0$ har de två lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$.

Detta förklaras av att en produkt av två tal är 0 om minst ett av talen är 0, men inte annars. Produkten $(x-1)(x+3)$ är alltså 0 bara om $x - 1 = 0$ eller $x + 3 = 0$ vilket ger de två lösningarna.

På samma sätt ser vi att ekvationen $x^2 + px = 0$ har de två lösningarna $x_1 = 0$ och $x_2 = -p$.

□

Anmärkning: Om vi multiplicerar ihop de två termerna får vi att $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$. Ekvationen $x^2 + 2x - 3 = 0$ har alltså de två rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$. Det vi ser här är ett generellt fenomen: ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna x_1 och x_2 om och endast om $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Detta ger både en möjlighet att kontrollera att rötterna är korrekta och en möjlighet att enkelt gissa heltalsrötter.

Observera! En ekvation $x^2 = a$, där a är ett negativt tal, saknar reella rötter. Det finns ju inte något reellt tal vars kvadrat är negativ. Däremot finns det komplexa lösningar. Ekvationen $x^2 = -4$ har lösningarna $x_1 = i$ och $x_2 = -i$ där i är den *imaginära enheten*. Genom kvadratkomplettering ser vi att ekvationen $x^2 + 2x + 2 = 0$ har rötterna $x_1 = -1 + i$ och $x_2 = -1 - i$. Vi återkommer till detta i ett senare kapitel. I detta kapitel är vi endast intresserade av reella lösningar.

2.2.1 Övningar

2.2.1 Lös ekvationerna

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $3 + 2x - x^2 = 0$ c) $2x^2 = 3 + x$

d) $3x + 7x^2 = 0$ e) $4x^2 + 9 = 12x$ f) $5x^2 + 3x = 1$

2.2.2 Kvadratkomplettera

a) $x^2 + 4x + 1$ b) $4x^2 - 36x + 100$ c) $3 - 12x - x^2$

2.2.3 Faktoruppdela (med reella tal)

a) $x^2 + x - 6$ b) $8 - 6x - 2x^2$

c) $x^2 - x - 1$ d) $x^2 + x + 1$

2.2.4 Angiv en andragradsekvation med rötterna

a) 2 och -5 b) $-\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$ c) $1 + \sqrt{5}$ och $1 - \sqrt{5}$

2.3 Ekvationer som leder till andragradsekvationer

En del ekvationer kan överföras till en andragradsekvation genom en algebraisk omskrivning.

Observera! Om en ekvation multipliceras med en faktor, som innehåller den obekanta variabeln, kan man få extra rötter. Ekvationen $(x-1)(x-2) = 0$ har rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$. Om vi multiplicerar med $x-3$ får vi ekvationen $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ som har ytterligare en rot $x_3 = 3$.

På samma sätt leder oftast division till att rötter tappas bort. Ekvationen $x^2 + 4x = 0$ har rötterna $x_1 = 0$ och $x_2 = -4$. Division med x leder till ekvationen $x + 4 = 0$, roten $x_1 = 0$ tappas bort.

Det är därför extra viktigt att pröva de erhållna rötterna i den givna ekvationen och, naturligtvis, tänka sig noga för då man dividerar med en faktor som innehåller den obekanta.

Exempel. Vi löser ekvationen $x - \dfrac{8}{x+2} = 0$.

Lösning. Ekvationen multipliceras med $x + 2$.

Rötterna till den nya ekvationen $x(x+2) - 8 = 0$ bestäms med kvadratkomplettering: $x(x+2)-8 = 0 \Leftrightarrow x^2+2x = 8 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1,2} = -1\pm3$.

Rötterna är $x_1 = 2$ och $x_2 = -4$. Vi prövar dessa i ursprungsekvationen och finner att båda är korrekta. (Eftersom vi multiplicerade med $x + 2$ är enda möjliga falska roten -2. Kontrollen var logiskt sett överflödig men man bör *alltid* kontrollera genom insättning.) $\square$

Vissa ekvationer, som innehåller rottecken kan överföras till en andragradsekvation genom att de båda leden kvadreras. Detta bygger på att om a och b är positiva tal och

$b = \sqrt{a}$ så är $b^2 = a$. Notera att om b är ett negativt tal och $b = -\sqrt{a}$ så är också $b^2 = a$. Den kvadrerade ekvationen *kan* ha fler rötter än den givna.

Exempel. Vi löser ekvationen $\sqrt{2x + 143} = x$.

Lösning. Ekvationen kvadreras. Den nya ekvationen $2x + 143 = x^2$ skrivs om till $x^2 - 2x + 143 = 0$.

Denna har rötterna $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{144} = 1 \pm 12$.

Roten $x_1 = 13$ är rot till givna ekvationen eftesom $\sqrt{2 \cdot 12 + 143} = \sqrt{169} = 13$.

Däremot är $x_2 = -11$ en s.k. *falsk rot*: $\sqrt{2 \cdot (-11) + 143} = \sqrt{121} = 11 \neq -11$.

Denna falska rot erhålls på grund av kvadreringen och är rot till ekvationen $\sqrt{2x + 143} = -x$. $\square$

Exempel. Vi löser ekvationen $1 + \sqrt{x^2 + 5} = 2x$.

Lösning. Ekvationen kan skrivas $\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$.

Kvadrering ger $x^2 + 5 = (2x - 1)^2$ som utvecklas till $x^2 + 5 = 4x^2 - 4x + 1$, d.v.s. $3x^2 - 4x - 4 = 0$, som löses.

Man får $x_1 = 2$ och $x_2 = -2/3$. Nu måste prövning ske genom insättning i den givna ekvationen, eller *hellre* genom prövning i ekvationen $\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$, varvid *endast tecknet behöver prövas*, eftersom $q^2 = p \Leftrightarrow q = \sqrt{p}$ eller $q = -\sqrt{p}$:

$x_1 = 2$ ger *höger led*: $HL = 2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$, så $x_1 = 2$ *är* en rot till den givna ekvationen. För säkerhets skull kontrollerar vi även vänster led (vi kan ju ha räknat fel): $VL = \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$ vilket bekräftar att $x_1 = 2$ är en rot till den givna ekvationen.

$x_2 = -2/3$ ger $HL = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 < 0$. Alltså är $x_2 = -2/3$ en falsk rot.

Svar: Ekvationen har roten $x_1 = 2$. $\square$

Flera olika typer av ekvationer, t.ex. fjärdegradsekvationer som saknar $x-$ och x^3-termer, vissa ekvationer som innehåller rotuttryck och en del andra, kan överföras till andragradsekvationer med lämpliga *substitutioner*.

En fjärdegradsekvation, som saknar x- och x^3-termer, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kan med substitutionen $x^2 = z$ överföras till en andragradsekvation för z, $az^2 + bz + c = 0$.

Om denna andragradsekvation har de positiva rötterna z_1 och z_2, så har den ursprungliga fjärdegradsekvationen de reella rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ och $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$, ty $x^2 = z$.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.

Lösning. Sätt $x^2 = z$. Då fås $z^2 - 20z + 64 = 0$ med rötter $z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$, d.v.s. $z_1 = 16$ och $z_2 = 4$.

$x^2 = z_1 = 16$ ger $x_1 = 4$ och $x_2 = -4$, $x^2 = z_2 = 4$ ger $x_3 = 2$ och $x_4 = -2$.

Rötterna till $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ är $4, -4, 2$ och -2. $\square$

Ibland är det enklast att lösa en ekvation som innehåller rottecken med hjälp av en substitution.

Exempel. Vi löser ekvationen $x + \sqrt{x} = 6$.

Lösning. Sätt $\sqrt{x} = z$. Då fås $z^2 + z = 6$ vars rötter är $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2}$, $z_1 = 2$, $z_2 = -3$.

$\sqrt{x} = z_1 = 2 \Rightarrow x = 4$, $\sqrt{x} = z_1 = -3$ är orimligt.

Den givna ekvationen har en enda rot, $x = 4$. $\square$

2.3.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2a

2.3.1 Lös ekvationerna

a) $x + 3 = 4 \cdot x^{-1}$ b) $x + 9x^{-1} = 12$ c) $3 + x^{-2} = x^{-1}$

2.3.2 Lös ekvationerna genom kvadrering

a) $x - 6 = \sqrt{x}$ b) $x + 1 = \sqrt{x^2 + 5}$ c) $x - 2 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d) $3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x$ g) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} - x = 3$

e) $x + 2\sqrt{x} = 8$ h) $2x + \sqrt{x^2 + x} = 1$

f) $\sqrt{x + 132} = x$ i) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5}$

2.3.3 Lös ekvationen

a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ d) $24x^2 = 72 + 2x^4$

b) $1225 - 74x^2 + x^4 = 0$

c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ e) $6x^4 = 7x^2 + 3$

2.3.4 Lös ekvationerna med substitution

a) $x - 6 = \sqrt{x}$ b) $x + 6\sqrt{x} = 1$ c) $x + 2 = 3\sqrt{x}$

2.4 Linjära ekvationssystem

Ibland har man flera ekvationer med flera obekanta, och man vill lösa ekvationssystemet, dvs hitta alla värden för de obekanta som uppfyller alla ekvationer samtidigt.

När man skall lösa ett sådant system försöker man genom *elimination* skaffa sig en ekvation, som endast innehåller en obekant. När man väl har löst denna kan man sätta in värdet i en av ursprungsekvationerna och lösa för den andra obekanta variabeln.

Exempel. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$

Metod 1: (Substitutionsmetoden): Man kan isolera x i den första ekvationen och få $x = (5 - 2y)/3$.

När man sätter in detta (substituerar) i den andra ekvationen får man

$$7(5 - 2y)/3 + 3y = 1 \Longleftrightarrow 35 - 14y + 9y = 3 \Longleftrightarrow 32 = 5y$$

och därmed $y = 32/5 = 6,4$ och $x = (5 - 2y)/3 = -13/5 = -2,6$.

Metod 2: (Additionsmetoden): Multiplicera (för att eliminera x) de givna ekvationerna med 7 resp. (-3) och addera:

$$\begin{cases} 21x + 14y = 35 \\ \underline{-21x - 9y = -3} \end{cases}$$
$$5y = 32$$

Här får man $y = 32/5 = 6,4$, som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger $x = -13/5 = -2,6$.

Svar: $x = -2,6$ och $y = 6,4$

OBS: Man bör alltid *kontrollera svaret* genom insättning i de givna ekvationerna! $\square$

Anmärkning 1. I exemplet ovan gäller att:

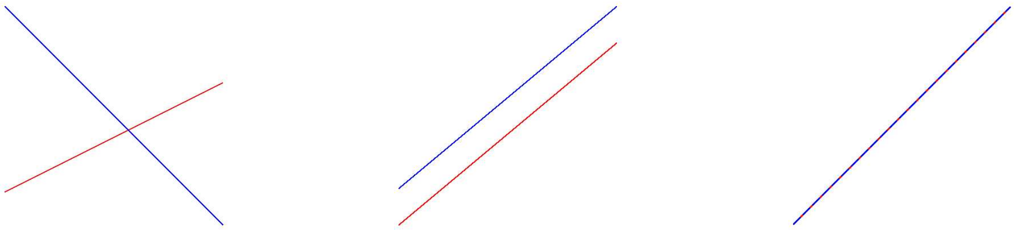
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5y = 32 \end{cases}$$

där det högra ekvationssystemet är *triangulärt*, d.v.s. koefficienterna för x och y bildar en triangel. När ett system är triangulärt, så är en av de obekanta redan eliminerad i sista ekvationen, så systemet är förberett för lösning.

Anmärkning 2. Det spelar ingen roll vilken av variablerna man eliminerar, så man kan börja med den som leder till de enklaste uttryck. Variablerna kan ha andra namn än x och y, vilka som helst egentligen; u och v är ganska vanliga. Man kan dessutom utvidga metoderna till system med 3 eller fler ekvationer (och 3 eller fler variabler).

Anmärkning 3. Geometriskt motsvarar den linjära ekvationen $ax + by = c$ en **rät linje**. (Här är a, b, c fasta parameter och x, y variabler). Ett system av två sådana linjära ekvationer motsvarar alltså skärningspunkterna mellan två räta linjer, och har därmed

- *en* lösning om de räta linjerna är *skärande*
- *ingen* lösning om de räta linjerna är *parallella* (och olika)
- *oändligt* många lösningar om de räta linjerna *sammanfaller*.



2.4.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2b

2.4.1 Lös ekvationssystemen:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 9x - 6y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 15s + 14t = 59 \\ 12s - 35t = 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 1/x + 1/y = 5/6 \\ 1/x - 1/y = 1/6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 6x + 5y + z = 45 \\ 5x + 2y - z = 23 \\ 13x - 7y + z = 6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x - y + z = 20,1 \\ x + y - z = 9,9 \\ 3x + 2y + 8z = 30,4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ a - b + 2c = 2 \\ 3a - 2b + c = -3 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 5x + 4y + z = 0 \end{cases}$

2.4.2 En person som tillfrågades om sin ålder svarade: ”För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag blott 4 gånger så gammal.” Hur gammal var han? (Du kan behöva räkna med halvår).

2.5 Polynom, ekvationer av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision

Vi ska nu titta lite på polynom. Polynom består av en summa av termer på formen ax^n, där *koefficienten* a är ett tal, *potensen* $n \geq 0$ ett heltal (med andra ord ett naturligt tal) samt x en variabel. Den högsta potensen n med koefficienten skild ifrån 0 i ett polynom kallas för *graden av polynomet*. (Istället för x kan man förstås använda en annan variabel om man så vill.)

Exempel. När vi löste andragradsekvationer så hade vi uttryck på formen x^2+3x+1. Detta är ett polynom av grad 2. Uttrycket x^4+3x^3+x är ett polynom av grad 4.

Däremot är **inte** uttrycken $x^2+x^{-1}+1$ eller $x^2+\sqrt{x}+1$ några polynom då potensen i den andra termen inte är ett naturligt tal. □

Vi låter $p(x)$ beteckna ett polynom. *Värdet i en punkt* a för polynomet är $p(a)$, dvs vi ersätter helt enkelt x med a. Ett *nollställe* till polynomet är ett tal b sådant $p(b)=0$.

Exempel. Låt $p(x)=x^2+3x+2$. Värdet i 2 är då $p(2)=2^2+3\cdot 2+2=12$ och värdet i -1 är $p(-1)=(-1)^2+3\cdot(-1)+2=0$. Alltså är -1 ett nollställe till polynomet. □

Det finns ett viktigt samband mellan nollställen till ett polynom och faktorer till polynomet. Följande sats är mycket viktig att behärska för att kunna arbeta med polynom:

Faktorsatsen: Antag att $p(x)$ är ett polynom och a ett tal. Då är a ett nollställe till $p(x)$, dvs $p(a)=0$, om och endast om $x-a$ är en faktor i $p(x)$, dvs

$$p(x)=(x-a)\cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom med grad ett mindre än $p(x)$.

Exempel. Vi såg i exemplet ovan att -1 är ett nollställe till polynomet $p(x)=x^2+3x+2$. Enligt faktorsatsen vet vi därmed att

$$x^2+3x+2=(x-(-1))\cdot q(x)=(x+1)\cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom av grad 2-1=1. Alltså är $q(x)=kx+m$ för några tal k och m. Vi kan räkna ut vad $q(x)$ är genom att utnyttja likheten

$$x^2+3x+2=(x+1)\cdot q(x)=(x+1)(kx+m)=kx^2+kx+mx+m=kx^2+(k+m)x+m.$$

Genom att identifiera koefficienterna för x^2 får vi $k=1$ och om vi identifierar konstanterna så får vi $m=2$. En extra kontroll får man genom att man ser att koefficienterna för x är 3 respektive $k+m=1+2=3$. Alltså är

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2),$$

och alltså är också -2 ett nollställe till polynomet. (Eventuellt kanske du kunde listat ut att det skulle vara just $x+2$ direkt i huvudet?) □

Metoden som användes i exemplet att hitta den andra faktorn när man känner en faktor i ett polynom kallas för kort division. Man kan alternativt använda sig av lång division med liggande stolen ungefär som för tal. Vi illustrerar de två metoderna i ytterligare ett exempel.

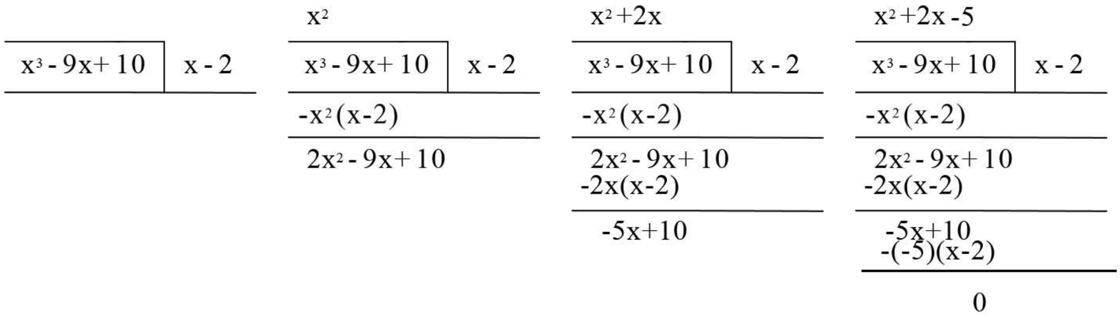
Exempel. Vi tittar på tredjegradspolynomet $x^3 - 9x + 10$. Genom att testa så ser vi att 2 är ett nollställe till polynomet, ty $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 0$. Därmed vet vi enligt faktorsatsen att $x - 2$ är en faktor och att $x^3 - 9x + 10 = (x - 2)q(x)$, där $q(x)$ är ett andragradspolynom.

Vi bestämmer först $q(x)$ med kort division. Vi har

$$x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c.$$

Koefficienten framför x^3 ger $a = 1$ och konstanten ger $10 = -2c$ så $c = -5$. Koefficienten framför x^2 ger nu $0 = -2a + b = -2 + b$ så $b = 2$. Kontroll med koefficienten framför x ger $-9 = -2b + c = -2 \cdot 2 - 5$ vilket stämmer alldeles utmärkt.

Vi utför nu lång division med liggande stolen. Här bestämmer man successivt koefficienten för den högsta kvarvarande potensen.



I första steget frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i täljaren dvs x^3. Jo den går x^2 gånger. Vi skriver detta överst och subtraherar sedan $x^2(x-2)$ ifrån täljaren och får $2x^2 - 9x + 10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren dvs $2x^2$. Jo den går $2x$ gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $2x(x - 2)$ ifrån återstoden av täljaren och får $-5x + 10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren dvs $-5x$. Jo den går -5 gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $-5(x - 2)$ ifrån återstoden av täljaren och får 0. Därmed ser vi att resten blir 0 (det visste vi ju redan) och kvoten blir $x^2 + 2x - 5$. □

Faktorsatsen kan man använda för att förkorta uttryck som består av en kvot av två polynom. För att förkorta ett sådant uttryck måste man hitta en gemensam faktor mellan de två polynomen. Vi tittar på ett exempel.

Exempel. Förkorta

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 5x^2 - 6x}$$

så långt det går. Först observerar vi att man kan bryta ut faktorn x ur både täljare och nämnare som vi förkortar bort. Kvar blir då

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$$

Täljaren kan vi faktorisera med hjälp av konjugatregeln till $(x-1)(x+1)$. För att kolla om någon av dessa två är faktorer i nämnaren så kollar vi om 1 eller -1 är ett nollställe till $x^2 + 5x - 6$. Vi finner att 1 är ett nollställe och faktoriserar (med kort division som ovan) $x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$. Därmed kan vi förkorta bort $x - 1$ och får till slut

$$\frac{x+1}{x+6},$$

vilket inte kan förkortas mer.

Observera att det urspungliga och det förkortade uttrycket är lika för alla x utom $x = 0$ och $x = 1$. För dessa två värden så ju inte det ursprungliga uttrycket definierat, $\square$

Vi såg i ett exempel ovan att om man visste ett nollställe till ett andragradspolynom så kunde man med hjälp av faktorisering få det andra nollstället. För andragradspolynom har vi ju redan en allmän metod för att hitta nollställen, men för polynom av högre grad kan man ha stor nytta av denna observation. Antag att vi har ett tredjegradspolynom $p(x)$ som vi vill hitta alla nollställen till och att vi känner till att a är ett nollställe. Då är $p(x) = (x-a) \cdot q(x)$ där $q(x)$ är ett andragradspolynom. Ett nollställe till $p(x)$ är nu ett nollställe till antingen $x - a$ eller till $q(x)$. Alltså för att hitta övriga nollställen till $p(x)$ så hittar vi nollställena till andragradspolynomet $q(x)$ vilket vi vet hur man gör.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^3 - 9x + 10 = 0$. Vi såg i ett tidigare exempel att $x^3 - 9x + 10 = (x-2)(x^2 + 2x - 5)$, så att $x_1 = 2$ är en lösning och eventuellt andra lösningar är nollställen till $x^2 + 2x - 5$. Dessa hittar vi med formeln för lösningar till andragradsekvationer:

$$x_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-5)} = -1 \pm \sqrt{6}$$

Rötterna är alltså $x_1 = 2,\ x_2 = -1 + \sqrt{6}$ och $x_3 = -1 - \sqrt{6}$. $\square$

Följande resultat kan man ha nytta av om man ska försöka hitta ett nollställe till ett polynom av grad 3 eller högre med heltalskoefficienter:

Antag att vi har ett polynom $x^3 + cx^2 + bx + a$ där alla koefficienter är heltal. Om x_1 är ett heltal som är ett nollställe till polynomet så gäller att konstanttermen a är en multipel av x_1. Med andra ord så är varje heltalsnollställe en delare till konstanttermen a. Samma sak gäller för polynom $x^n + \ldots + bx + a$ av vilken grad n som helst.

Exempel. Vi tittar på polynomet $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Det har endast heltalskoefficienter så om det har något heltal som nollställe så måste det vara en delare till 6. Möjliga nollställen blir alltså $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Om man testar dessa tal så finner man att 4 av dem är nollställen nämligen $\{1, -1, 2, -3\}$. Vi kan alltså faktorisera polynomet som

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3). \qquad \square$$

Om ett polynom $p(x)$ har samma faktor $(x - a)$ två gånger så säger man att a är en *dubbelrot* till ekvationen $p(x) = 0$ (om den förekommer tre gånger så kallas den trippelrot osv).

Exempel. Lös ekvationen $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$.

Lösning: Först löses ekvationen $x^2 - 2x - 7 = 0$, som har rötterna $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Polynomet kan faktoriseras som

$$(x^2 - 2x - 7)^2 = (x - (1 + 2\sqrt{2}))^2(x - (1 - 2\sqrt{2}))^2,$$

så $1 + 2\sqrt{2}$ och $1 + 2\sqrt{2}$ är dubbelrötter. $\square$

2.5.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2c

2.5.1 Förenkla följande kvoter mellan polynom så långt det går.

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4}$

a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^4 - 7x^2 + 6x}$

2.5.2 Lös följande ekvationer. Tips: De har minst en rot som är ett heltal.

a) $x^3 + 3x^2 + x = 0$

b)$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $2x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = 0$

d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3 = 0$

2.5.3 Lös följande ekvationer. Ange om någon av rötterna är dubbelrot eller trippelrot.

a) $(x - 1)^3 = 0$

b) $x^3 - 1 = 0$

c) $(x^2 - 1)^3 = 0$

2.5.4 Faktoruppdela följande polynom.

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $x^3 + 7x^2 + 11x + 2$

c) $6 + 3x^2 - 5x - x^3$

3 Facit

1.1.1 (a) 378 rest 18 (b) 357 (c) 7497 är delbart med 21

1.1.2 (a) 319
(b) $^{-}564$

1.1.3 (a) $a + 2 \cdot a \cdot b$
(b) $2 \cdot a \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot b - 2 \cdot a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b = 2a^2b + 2ab^2 - 2a^2 - 2ab$

1.2.1 (a) $\frac{1}{8}$ (b) $-\frac{281}{28}$ (c) $-\frac{196}{33}$ (d) $\frac{17}{20}$ (e) $\frac{251}{24}$ (f) $\frac{344}{255}$

1.2.2 (a) $\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$ (b) $-\frac{11}{420}$

1.2.3 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{34}$ (c) $\frac{39}{22}$ (d) 24
(e) $\frac{38}{15}$ (f) $\frac{10}{57}$ (g) $\frac{273}{128}$ (h) $\frac{11011}{1536}$

1.2.4 (a) $^{-}2$ (b) $\frac{253}{340}$ (c) $-\frac{1349}{1968}$

1.3.1 (a) 25 (b) 32 (c) 81 (d) $^{-}64$
(e) 1 (f) 100 (g) 1 (h) 1

1.3.2 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{27}$ (c) 1

1.3.3 (a) 2^{-6} (b) 2^2 (c) 2^{-4}

1.3.4 (a) $\frac{4}{21}$ (b) $^{-}72$

1.4.1 (a) Ja.
(b) Ja. Motsatsen $2 > 3$ är ju falskt.
(c) Nej.

1.4.2
1. $c - a = (c - b) + (b - a) > 0$
2. Exemplet
3. $(b + d) - (a + c) = (d - c) + (b - a) > 0$
4. $b \cdot c - a \cdot c = (b - a) \cdot c > 0$
5. $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c = {}^{-}(b - a) \cdot c = (b - a) \cdot {}^{-}c > 0$

1.4.3 T.ex. $3 < 4$ och $2 < 6$ men $(3 - 2) < (4 - 6)$ gäller inte.

1.5.1	(a) 7	(b) 7	(c) 0	
1.5.2	(a) $^-2$ och 0	(b) $^-4.5$ och 10.5	(c) $^-4$	(d) $^-1$ och 4
	(e) Inget tal satisfierar ekvationen			
1.5.3	(a) $1 \leq x \leq 3$		(b) $^-8 < x < 2$	
	(c) $^-1 \leq x < 0$ eller $4 < x \leq 5$		(d) $x = {}^-2$	
1.6.1	(a) 0.7	(b) 300	(c) $15\sqrt{2}$	(d) $\sqrt{2}/5$
	(e) $\sqrt{3}$	(f) $10 - \sqrt{2}$		
1.6.2	(a) ± 5	(b) $\pm\sqrt{5}$	(c) $\pm\frac{2}{3}$	(d) $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$
	(e) 0			
1.6.3	(a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$	(b) $\frac{\sqrt{21}}{7}$	(c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$	(d) $\sqrt{11} + 3$
	(e) $^-(2 + \sqrt{5})$	(f) $3 - 2\sqrt{2}$		
1.7.1	(a) $3\sqrt{3}$	(b) $\sqrt{2}$	(c) $^-2\sqrt[3]{3}$	(d) $\sqrt[12]{3}$
	(e) $\sqrt[10]{2}$	(f) $\sqrt[8]{5}$	(g) $\sqrt[3]{4}$	(h) $2\sqrt[3]{3}$
1.7.2	(a) $\pm\sqrt{2}$	(b) 3	(c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	(d) $^-2$
	(e) Ingen reell rot			
1.7.3	(a) $3a$	(b) $\sqrt[4]{x}$	(c) $\sqrt[15]{x}$	(d) $\sqrt{\lvert a \rvert}$
	(e) $\sqrt[12]{a^5}$	(f) $\sqrt[4]{x^3}$		
1.8.1	(a) 3	(b) $\frac{1}{2}$	(c) 2	(d) $\frac{1}{2}$
	(e) 9	(f) $\frac{1}{9}$	(g) 5	
1.8.2	(a) $3^{\frac{1}{3}}$	(b) $2^{\frac{1}{2}}$	(c) $^-2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$	(d) $3^{\frac{1}{12}}$
	(e) $2^{\frac{1}{10}}$	(f) $5^{\frac{1}{8}}$	(g) $2^{\frac{2}{3}}$	(h) $2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$
1.8.3	(a) $3a$	(b) $x^{\frac{1}{4}}$	(c) $x^{\frac{1}{15}}$	(d) $a^{\frac{1}{2}}$

(e) $a^{\frac{5}{12}}$ (f) $x^{\frac{3}{4}}$

1.9.1 (a) $9t-u-9v$ (b) $2a+12c+73x$

1.9.2 (a) $p+r$ (b) $3b+2c$ (c) $4a-2c$

1.9.3 (a) $20x^2z^8$ (b) $^-27a^4b^5c^4$ (c) $14p^3q^9r^4s^2$

1.9.4 (a) $27x^6y^3$ (b) $^-128a^8b^7c^6$ (c) $a^{4p}b^{7p}$

1.9.5 (a) $2x^2+3xy-2y^2$ (b) $2x^3+x^2y-5xy^2+2y^3$

(c) a^5+x^5 (d) $^-2x^4+x^3+2x^2-13x+6$

1.9.6 (a) $9a^2-24ab+16b^2$ (b) $a^6+4a^3b^2+4b^4$ (c) $2m^8+32$

1.9.7 (a) $36-x^2$ (b) a^4-y^2 (c) $x^{12}-81$

1.9.8 (a) $y^3+9y^2x+27yx^2+27x^3$ (b) $27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$

(c) $x^{12}-18x^9+108x^6-216x^3$

1.9.9 (a) $(x-a^2)(x+a^2)$ (b) $x^2(3x+5)(3x-5)$

(c) $(x+9)^2$ (d) $x^2y(x-2y)^2$

(e) $x(x-1)(x^2+x+1)$ (f) $3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$

(g) $^-x^2(x^2+1)(x+1)(x-1)$ (h) $2x^2y(3y^2-2x)(9y^4+6y^2x+4x^2)$

1.9.10 (a) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$
(b) $1-7y+21y^2-35y^3+35y^4-21y^5+7y^6-y^7$
(c) $32x^5+80x^4a^2+80x^3a^4+40x^2a^6+10xa^8+a^{10}$
(d) $x^6y^{12}-18x^5y^{10}z+135x^4y^8z^2-540x^3y^6z^3+1215x^2y^4z^4-1458xy^2z^5+729z^6$

1.9.11 (a) $\dfrac{3a^6}{8c^2}$ (b) $\dfrac{8y}{9x}$ (c) $\dfrac{2a+y}{2a}$ (d) $3xy+5y-2x$

1.9.12 (a) $\dfrac{2}{b-a}$ (b) $\dfrac{x^2(1+2x)}{(1-2x)}$ (c) $\dfrac{^-1}{(x-y)^2}$

(d) $\dfrac{b^4+3}{b^4-3}=\dfrac{b^4+3}{(b-\sqrt[4]{3})(b+\sqrt[4]{3})(b^2+\sqrt{3})}$

(e) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-b}$ (f) $\dfrac{a+1}{a}$ (g) $\dfrac{x^2+4}{x^2+2x+4}$

1.9.13 (a) a^2-ab+b^2 (b) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

(c) Kan inte förkortas (d) ${}^{-}(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

1.9.14 (a) $x-y^2$ (b) $\dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x(x^2-x+1)}$

(c) $\dfrac{x}{y}$ (d) $\dfrac{1}{2}$

1.9.15 (a) $\dfrac{18}{x(x+3)(x-3)}$ (b) $\dfrac{2x^2-7x-2}{2x(x-4)}$

(c) $\dfrac{{}^{-}1}{x(x+1)(x-1)}$ (d) $\dfrac{8-2x^2-x^3}{4(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)}$

1.9.16 (a) $|c+2|$, gäller för alla reella c

(b) $\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} 1 & \text{om } c>0 \\ {}^{-}1 & \text{om } c<0 \end{cases}$ gäller för alla reella $c\neq 0$

(c) 1, gäller för $c>0$

(d) ${}^{-}c\sqrt{9-c}$, gäller för $c<9$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{c-2}}$, gäller för $c>2$

(f) $\dfrac{|c|\sqrt{c+2}}{c}=\begin{cases} \sqrt{c+2} & \text{om } c>0 \\ {}^{-}\sqrt{c+2} & \text{om } {}^{-}2\leq c<0 \end{cases}$, gäller för $c\geq {}^{-}2, c\neq 0$

2.1.1 (a) $x=7$ (b) $x=-\frac{3}{7}$ (c) Alla tal. (d) Inga.

2.1.2 (a) $y=3x-7$ (b) $y=\frac{2x-3}{11}$

2.2.1 (a) 1 och -4 (b) -1 och 3 (c) -1 och $\frac{3}{2}$

(d) 0 och $-\frac{3}{7}$ (e) $\frac{3}{2}$ (f) $-\frac{3+\sqrt{29}}{10}$ och $-\frac{3-\sqrt{29}}{10}$

2.2.2 (a) $(x+2)^2-3$ (b) $(2x-9)^2+19$ (c) $39-(x+6)^2$

2.2.3 (a) $(x-2)(x-3)$ (b) $-2(x-1)(x+4)$

(c) $(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$ (d) $x^2 + x + 1$

2.2.4 (a) $x^2 + 3x - 10 = 0$ (b) $6x^2 - x - 2 = 0$

(c) $x^2 - 2x - 4 = 0$

2.3.1 (a) 1 och -4 (b) $6 + 3\sqrt{3}$ och $6 - 3\sqrt{3}$

(c) Ingen reell rot

2.3.2 (a) 9 (b) 2 (c) Ingen rot (d) 2 (e) 4

(f) 12 (g) 3 (h) $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ (i) 6

2.3.3 (a) 2, -2, $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$ (b) 5, -5, 7 och -7 (c) 2 och -2

(d) $\sqrt{6}$ och $-\sqrt{6}$ (e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ och $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

2.3.4 (a) 9 (b) $19 - 6\sqrt{10}$ (c) 1 och 4

2.4.1 (a) $x = 3,5,\ y = 1$ (b) $x = 4,\ y = 1$ (c) $x = -2,\ y = 2$

(d) saknar lösning

(e) oändligt många lösningar, av formen: $x = t,\ y = 3 - 5t$ för alla reella t

(f) $s = 3,\ t = 1$ (g) $x = 2,\ y = 3$ (h) $x = 3,\ y = 5,\ z = 2$

(i) $x = 10,\ y = -0,04,\ z = 0,06$ (j) $a = -1,\ b = 1,\ c = 2$

(k) $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$

2.4.2 Han var 48 år.

2.5.1 (a) $\frac{x-1}{x+4}$ (b) $\frac{x+2}{x^2+2x-3}$

2.5.2 (a) $\{0, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$ (b) $\{-2, 1, 3\}$

(c) $\{-2, \frac{-5-\sqrt{21}}{2}, \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\}$ (d) $\{2\}$

2.5.3 (a) 1 är en trippelrot (b) 1 (enkelrot)

(c) 1 och -1 är trippelrötter

2.5.4 (a) $(x+2)(x-1)(x-3)$ (b) $(x+2)(x^2+5x+1)$

(c) $(x-2)(-3+x-x^2)$