
Tentamen för TMV125 2008-10-24 - Lösningar

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - 5y + 7z = 1 \end{cases}$$

b) Lös ekvationen $z^4 = -1$ fullständigt. (3p)

c) I vilket eller vilka intervall av x -värden är funktionen $f(x) = xe^{-x}$ konkav (=concave down)? (2p)

d) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \ln x + x^3}{(\ln x)^6 + 2x^3} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{4/x}$$

e) Funktionen $f(x) = x + \log_2 x$ är injektiv då $x > 0$. Låt $g(x)$ vara dess invers. Beräkna $g'(3)$. (Deriveringsregel: $\frac{d}{dx} \log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}$). (2p)

f) I en rätvinklig triangel ökar kateternas längder med hastigheterna 3 m/s respektive 4 m/s. Hur snabbt växer triangelns area i det ögonblick då kateterna är 3 m resp. 4 m långa? (2p)

Lösningar (i tentan skulle dock bara svaren ges!)

(a) Systemets totalmatris överförs genom radoperationer till trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Med $z = t$ som fri variabel får vi genom bakåtsubstitution:

$$\text{Svar : } x = \frac{4}{3} - t, \quad y = \frac{1}{3} + t, \quad z = t.$$

(b) Sätt $z = re^{i\theta}$, då är $z^4 = r^4 e^{i4\theta}$. Högerledet i polär form: $-1 = e^{i\pi}$. Detta ger

$$r^4 = 1, \quad 4\theta = \pi + 2\pi n, \quad \text{för varje } n \in \mathbb{Z}.$$

Så $r = 1$ och vi finner 4 olika lösningar genom att välja $n = 0, 1, 2, 3$. Motsvarande värden på θ är $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ and $7\pi/4$ respektive. För att minska arbetet noterar vi att $n = 0$ ger $z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ och att lösningarna bildar en kvadrat med centrum i 0 i komplexa talplanet.

Därför är lösningarna relaterade enligt:

$$z_3 = -z_1, \quad z_4 = \overline{z_1}, \quad z_2 = -z_4 (= \overline{z_3}).$$

Svar:

$$z_{1,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i),$$
$$z_{2,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

(c) f är konkav då $f'' < 0$. Produktregeln ger

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x), \quad f''(x) = e^{-x}(x - 2).$$

Thus $f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Svar: $(-\infty, 2)$.

(d) **i** Eftersom $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$, så är de dominerande termerna i täljaren och nämnaren x^3 och $2x^3$ respektive. Detta ger att gränsvärdet är $\frac{1}{2}$.

ii Sätt $y = \frac{\pi}{2} - x$. Eftersom $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y \rightarrow 0$ får vi

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

iii Sätt $y = 1/x$. Eftersom $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow \pm\infty$ får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{4}{x}} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{5}{y} \right)^y \right]^4 = (e^5)^4 = e^{20}.$$

Svar: (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 e^{20}

(e) Med $y = f(x)$, $x = g(y) = f^{-1}(y)$ har vi sambandet

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x \ln 2}}.$$

Med $y = x + \log_2 x = 3$ ser vi att $y = 3$ ger $x = 2$ (enda lösning!), och svaret

Svar: $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 \ln 2}} = \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 + 1} = \frac{\ln 4}{\ln 4 + 1}.$

(f) Låt x och y beteckna längderna av triangelns kateter. Då är

$$A = \frac{1}{2}xy \quad (1)$$

och den givna informationen är att

$$x = 3, \quad y = 4, \quad \frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = 4. \quad (2)$$

Derivera (1) med avseende på t och sätt in informationen i (2). Vi får då

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{2} (3 \cdot 4 + 4 \cdot 3) = 12.$$

Svar: Arean ökar med $12m^2/s$ i det givna ögonblicket.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

- 2 Givet är de tre punkterna $A = (1, 1, 1)$, $B = (7, 3, -2)$ och $C = (4, 9, -4)$. (6p)
Låt L vara linjen genom A och B . Låt P vara planet som innehåller A , B och C . Låt Q vara planet $x - y - 2z = -12$.

- a) Ange en ekvation för L .
- b) Ange en ekvation för P .
- c) Beräkna skärningspunkten mellan L och Q .

Lösning:

- a) Riktningen för L ges av $\mathbf{v}_1 = (7, 3, -2) - (1, 1, 1) = (6, 2, -3)$. Linjen ges därmed i parameterform av

$$L = \{(1 + 6t, 1 + 2t, 1 - 3t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

- (b) Vi har $\vec{AB} = (6, 2, -3)$ och $\vec{AC} = (4, 9, -4) - (1, 1, 1) = (3, 8, -5)$.
En normal till planet ges av

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix} = (2(-5) - 8(-3), 3(-3) - 6(-5), 6(8) - 3(2)) = (14, 21, 42).$$

Väljer vi A som punkt i planet, så kan ekvationen för planet skrivas

$$14(x - 1) + 21(y - 1) + 42(z - 1) = 0,$$

vilket förenklas till $2x + 3y + 6z = 11$.

(c) Vi sätter in parameterekvationen för L i ekvationen för planet Q och löser ut t :

$$(1 + 6t) - (1 + 2t) - 2(1 - 3t) = -12,$$

Alltså: $t = -1$. Skärningspunkten mellan L och Q är $(1 + 6(-1), 1 + 2(-1), 1 - 3(-1)) = (-5, -1, 4)$.

- 3 Ange det största och det minsta värdet som antas av funktionen (6p)
 $f(x) = e^{-x^2}(x + \frac{1}{2})$ på intervallet $[0, 10]$.

Lösning:

Vi behöver kontrollera ändpunkterna och derivatans nollställen i det inre av intervallet.

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - x - 2x^2).$$

Alltså är $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$ or $x = -1$. Den sistnämnda punkten är utanför intervallet och ignoreras därför. Vi måste nu jämföra $x = 1/2$ med ändpunkterna $x = 0$ och $x = 10$. Vi får

$$f(0) = 1/2, \quad f(1/2) = e^{-1/4}, \quad f(10) = \frac{21}{2e^{100}}.$$

Uppenbarligen är det tredje värdet minst, och det andra är störst (eftersom $e^{1/4} < 2$, eller, ekvivalent $e < 16$).

Största värdet är $e^{-1/4}$, minsta värdet är $\frac{21}{2e^{100}}$.

- 4 Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x - 2}$. (6p)

Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
(Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

Lösning:

Inga uppenbara symmetrier kan användas. Vi noterar att

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

Därmed är linjerna $y = \pm 1$ horisontella asymptoter.

f är definierad för alla reella x utom $x = 2$. Vi kollar vad som händer nära denna punkt:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty.$$

Därmed är linjen $x = 2$ en vertikal asymptot.

Bestäm nu derivatans nollställen:

$$f'(x) = \frac{(x-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{(x-2)^2}.$$

Nollställena ges då av ekvationen

$$(x-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2} = 0.$$

Gör liknämngt och förenkla:

$$\frac{x(x-2) - (x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+1)}{\sqrt{x^2+2}} = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Pga derivatans teckenvariation $+0-$ kan vi sluta oss till att funktionen har ett lokalt maximum i $x = -1$, $f(-1) = -1/\sqrt{3}$.

(FIGUR HÄR!)

- 5 En triangel har sina hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,2)$. Låt A vara punkten $(1,0)$. Om en linje parallell med x-axeln dras någonstans mellan $y = 0$ och $y = 2$, så kommer den att skära två av triangelns sidor, säg i punkterna B och C . På vilken höjd ska man dra denna linje för att minimera omkretsen av triangeln ABC ? (6p)

Lösning:

Observera att $|AB| = |AC|$. Antag att den horisontella linjen dras i $y = 2t$, så $t \in [0, 1]$. Då är $B = (t, 2t)$ and $C = (2-t, 2t)$ respektive. Triangelns omkrets blir då

$$\begin{aligned} P(t) &= |AB| + |AC| + |BC| = 2|AB| + |BC| \\ &= 2\sqrt{(t-1)^2 + (2t)^2} + (2-2t) = 2(\sqrt{5t^2 - 2t + 1} + 1 - t). \end{aligned}$$

Det är denna funktion vi ska minimera. Derivera:

$$P'(t) = 2 \cdot \left(\frac{5t-1}{\sqrt{5t^2-2t+1}} - 1 \right).$$

$P'(t) = 0$ ger ekvationen

$$\frac{5t - 1}{\sqrt{5t^2 - 2t + 1}} - 1 = 0,$$

varav

$$(5t - 1)^2 = 5t^2 - 2t + 1 \Rightarrow 5t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(5t - 2) = 0,$$

så $t = 0$ (falsk rot!) eller $t = 2/5$. Nu är $P(0) = 4$ och $P(2/5) = 16/5$ (och derivatans teckenväxling kring $t = 2/5$ är $-0+$), så minsta omkretsen får vi då $t = 2/5$, dvs då den horisontella linjen dras på höjden $y = 4/5$.

- 6 Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)
- a) För varje komplext tal z gäller att $|z| = |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.
 - b) Om ett linjärt ekvationssystem har fler ekvationer än obekanta så kan systemet inte ha entydig lösning.
 - c) Olikheten $e^x \geq x + 1$ är sann för alla reella tal x .
 - d) Låt $\mathbf{u}$ vara en vektor i rummet. Om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ så måste $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
 - e) Om $f(x)$ är definierad i hela $\mathbb{R}$ och deriverbar, och har totalt 2008 olika nollställen, så har ekvationen $f'(x) = 0$ fler än 1000 lösningar.
 - f) Om $f \circ f$ är en injektiv (one-to-one) funktion, så måste f själv vara injektiv.

Svar:

- a) Falskt. (Ex: $z = 1 + i$ ger $VL = \sqrt{2}$, $HL = 2$).
- b) Falskt. (Ex: $x + y = 2$, $x - y = 0$, $2x + y = 3$ har entydig lösning).
- c) Sant. ($y = x + 1$ är tangent i $x = 0$ till den konvexa funktionen $y = e^x$).
- d) Sant. ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$, endast nollvektorn har längden noll).
- e) Sant. (Använd medelvärdessatsen eller Rolles sats på varje par av nollställen, vi får då ett garanterat nollställe för derivatan. Den måste ha minst 2007 olika nollställen).
- f) Sant. (Följer av att $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2)$).

- 7 a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x . (2p)

- b) Bevisa att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$. Du behöver inte bevisa eventuella hjälpsatser om trigonometri eller gränsvärden. (4p)

Lösning: Se läroboken!