

1) Bara svar skulle ges, men här kommer mycket korta lösningsanvisningar.

a) Totalmatris $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$

b) $|-1+i\sqrt{3}|=2$, $\arg(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ $-1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

c) $\frac{x^2+2x+2}{2-x} = \frac{(x+1)^2+1}{2-x}$ $x \neq 2$, men > 0
om nämnaren är > 0 Svar: $x < 2$

d) $\frac{2\sin x \cos x}{= \sin 2x} = \frac{1-2\sin^2 x}{= \cos 2x} \Leftrightarrow \tan 2x = 1$ ($\cos 2x = 0$ ger ej lösning!)
 $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$ Svar: $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$

e) (i) $\ln(x^2-x) - \ln(x^2-1) = \ln \frac{x^2-x}{x^2-1} = \ln \frac{x}{x+1} \rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

(ii) $\frac{x^3}{(\tan 2x)^3} = \frac{1}{\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{\cos 2x}\right)^3} \xrightarrow{\text{då } x \rightarrow 1} \frac{1}{1^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^3} = \frac{1}{8}$

(iii) $\frac{\ln(1+2x)}{e^x-1} = \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{2}{\frac{e^x-1}{x}} \xrightarrow{\text{då } x \rightarrow 0} 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$

f) $\sqrt{x} + y + \sqrt{y} = 3$ $y = y(x)$ $y(1) = 1$

Derivera m.a.p. x : $\frac{1}{2\sqrt{x}} + y' + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0$ $x=y=1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}$

Tangentens ekvation: $y-1 = -\frac{1}{3}(x-1)$, $y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}$

2) a) Riktningssvektor för linjen: $\vec{AB} = (1,1,1) - (0,1,3) = (1,0,-2)$

Utgående från punkten $A = (0,1,3)$ har vi parameterrepresentation

$(x,y,z) = (0,1,3) + t(1,0,-2)$

b) Två vektorer i planet: $\vec{AB} = (1,0,-2)$, $\vec{AC} = (4,4,0) = 4(1,1,0)$

En normalvektor till planet: $n = (1,0,-2) \times (1,1,0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-2, -1-2, 1) = (-2, -3, 1)$

Planets ekvation: $n \cdot (x-0, y-1, z-3) = 0 \Leftrightarrow \underline{2x-2y+z=1}$

c) Med hjälp av n har vi: $d = \frac{|\vec{AO} \cdot n|}{|n|} = \frac{|n \cdot \vec{AB}|}{|n|} = \frac{|-2-4+2|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \underline{6}$

3/ $f(x) = \ln(8+2x-x^2)$ är definierad då $8+2x-x^2 > 0$
 $\Leftrightarrow (x+2)(4-x) > 0$
 $\Leftrightarrow -2 < x < 4 \quad \mathcal{D}(f) = \underline{(-2, 4)}$

Vi deriverar funktionen för att undersöka dess variation:

$$f'(x) = \frac{2-2x}{8+2x-x^2} \quad \text{Enda nollställe: } x=1$$

x	-2		1		4
f'			+	0	-
f	$-\infty$			$\nearrow \ln 9 \searrow$	$-\infty$

lok. max
= abs. max

$f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -2^+$ och $x \rightarrow 4^-$.

Lydelsen är värdemängden

$$\mathcal{Z}(f) = \underline{(-\infty, \ln 9]}$$

4/ $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{2}{x} & \text{om } 0 < x \leq 2 \\ e^{4-x} & \text{om } 2 < x < 4 \end{cases}$

Diskontinuitet i $x=2$

$$f(2) = 5 \quad \text{men} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = e^2 \quad (> 5)$$

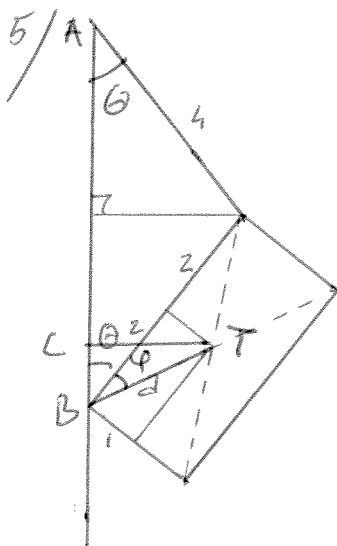
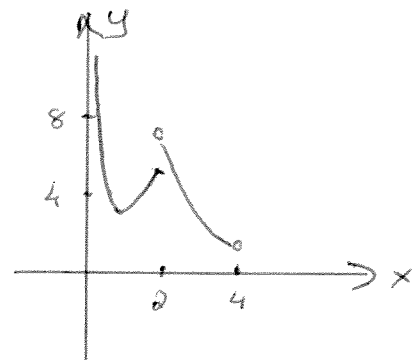
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - \frac{2}{x^2} & \text{om } 0 < x < 2 \\ -e^{4-x} & \text{om } 2 < x < 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(ej deriverbar i } x=2, \text{ men} \\ \text{vänster- och högerderivata finns} \end{matrix}$$

$$f'_-(2) = 3,5, \quad f'_+(2) = -e^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$(f'(x) < 0 \text{ för } 2 < x < 4)$

x	0		1		2		4
f'			-	0	+	$\frac{3}{2}$	-
f	∞		$\searrow 3$		$\nearrow 5/e^2$		1



Med figurens beteckningar: maximera AC!

$$AB = 2 \cdot 4 \cdot \cos \theta = 8 \cdot \cos \theta$$

$$BC = d \cdot \cos(\theta + \varphi) = \underbrace{d \cdot \cos \varphi}_{=2} \cdot \cos \theta - \underbrace{d \cdot \sin \varphi}_{=1} \cdot \sin \theta$$

(se figuren!) (se figuren!)

$$AC = AB - BC = 6 \cos \theta + \sin \theta = f(\theta)$$

$$\text{Derivera: } f'(\theta) = -6 \sin \theta + \cos \theta \quad \text{Nollställe: } \tan \theta = \frac{1}{6}$$

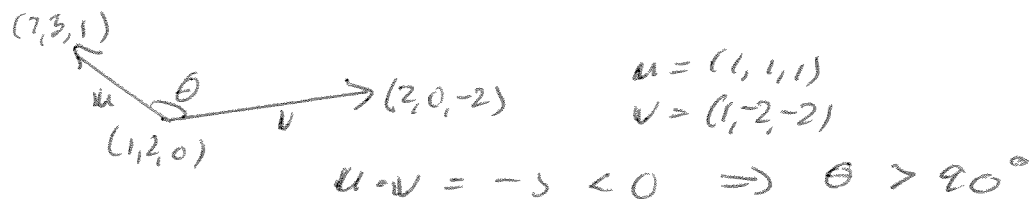
Eftersom $\sin \theta$ ökar och $\cos \theta$ växer $\leq$ är teckenväxlingen kring nollstället $+0-$ (eller $f''(\theta) = -6 \cos \theta - \sin \theta < 0$) dvs max

$$\text{Den sökta vinkeln är } \underline{\arctan \frac{1}{6}} \quad (\approx 9,5^\circ)$$

6/ a) Sant ($\operatorname{Im}(a+bi) = b$)

b) Falskt (Ex: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ Her okända än elevationer men ingen lösning!)

c) Sant



$u = (1, 1, 1)$
 $v = (1, -2, -2)$
 $u \cdot v = -3 < 0 \Rightarrow \theta > 90^\circ$

d) Sant $f'(x) > 0$ för alla $x \Rightarrow f$ väx., har högst ett nollställe
 $f(0) = -1, f(1) = 2, f$ kont. $\Rightarrow f$ har minst ett nollställe i $(0, 1)$

e) Falskt Om $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$ där $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$
 så måste också omvändningen gälla.
 Därmed måste även f^{-1} vara växande.

f) Falskt Antag $x_1 < x_2 < x_3, f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$
 f deriverbar, Rolle $\Rightarrow \exists c_1 \in (x_1, x_2), c_2 \in (x_2, x_3)$
 $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$
 f' deriverbar, Rolle $\Rightarrow \exists d \in (c_1, c_2): f''(d) = 0$

7/ se läroboken!