

Extra räkneexempel på linjer och plan.

Ett plan π innehåller punkterna $P = (1, -1, 2)$, $Q = (4, 0, 1)$, $R = (1, 1, 3)$.

- Bestäm en normalvektor till planet.
- Bestäm en ekvation för planet.
- Beräkna skärningspunkten mellan planet π och rätta linjen $(x, y, z) = (2, -2, 3) + t(1, 1, -2)$.
- Bestäm skärningslinjen mellan planet π och planet $x - 2y + 3z = 4$.
- Beräkna avståndet mellan punkten P och planet $x - 2y + 3z = 4$.
- Beräkna avståndet mellan punkten P och rätta linjen i c).

Lösningar

- a) Vi tar två vektorer som *ligger i planet* (vanligt språkbruk, men egentligen är *parallella med planet*, eftersom de inte har någon fast placering i rummet - bara längd och riktning):

$$\mathbf{u} = \vec{PQ} = (4, 0, 1) - (1, -1, 2) = (3, 1, -1) \text{ och}$$

$$\mathbf{v} = \vec{PR} = (1, 1, 3) - (1, -1, 2) = (0, 2, 1).$$

Tar vi kryssprodukten av dessa, får vi en vektor som är vinkelrät mot varje vektor i planet, dvs en *normalvektor* till planet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \\ &= 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = (3, -3, 6) = 3(1, -1, 2). \end{aligned}$$

Eftersom den kortare vektorn $(1, -1, 2)$ har samma riktning som $(3, -3, 6)$, så kan vi lika gärna välja den förstnämnda som normalvektor: $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$.

Obs! Ren tillfällighet att komponenterna blir precis samma som koordinaterna för punkten P .

- b) Planets ekvation enligt Adams sid 586, där $\mathbf{n} = (A, B, C)$ och (x_0, y_0, z_0) är en punkt i planet:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Om vi väljer normalvektorn vi fick i a) och punkten $Q = (4, 0, 1)$ (spelar ingen roll vilken punkt i planet som väljs, det blir samma ekvation!), så har vi alltså:

$$1(x - 4) - 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0$$

vilket förenklas till

$$x - y + 2z = 6$$

- c) Linjens ekvationer och planets ska samtidigt vara satisfierade för varje punkt på skärningslinjen, dvs vi ska lösa ett ekvationssystem med ekvationerna

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 2t \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Ersätt x, y, z i sista ekvationen (planet) med uttrycken i de tre första (linjens ekvationer) och lös ut t . Sätt sedan in detta värde på t i linjens ekvationer. Vi får då $t = 1$ och $(x, y, z) = (3, -1, 1)$, som är skärningspunkten.

- d) Planens skärningslinje ges på motsvarande sätt av lösningarna till systemet av de två planens ekvationer:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Överför genom radoperationer detta system till trappstegsform:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

z är fri variabel, vi kallar den för t och får

$(x, y, z) = (8, 2, 0) + t(-1, 1, 1)$, som är skärningslinjens ekvation(er).

- e) Ta en punkt i planet (se ekvationen!), t ex $S = (1, 0, 1)$. Se figur 1 -2 sid 3! Avståndet är längden av projektionen av vektorn $\mathbf{r} = \vec{SP}$ på riktningen av normalvektorn $\mathbf{m} = (1, -2, 3)$, dvs

$$|\mathbf{r}| \cos \theta = \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{|(0, -1, 1) \cdot (1, -2, 3)|}{|(1, -2, 3)|} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

- f) Ta en punkt på linjen (se ekvationen!), naturligen $T = (2, -2, 3)$. Se figur 3 sid 3! Avståndet är längden av projektionen av vektorn $\mathbf{w} = \vec{TP}$ på riktningen av riktningsektorn $\mathbf{l} = (1, 1, -2)$, dvs

$$|\mathbf{w}| \sin \phi = \frac{|\mathbf{w} \times \mathbf{l}|}{|\mathbf{l}|} = \frac{|(-1, 1, -1) \times (1, 1, -2)|}{|(1, 1, -2)|} = \frac{|(-1, -3, -2)|}{|(1, 1, -2)|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

Alternativ metod:

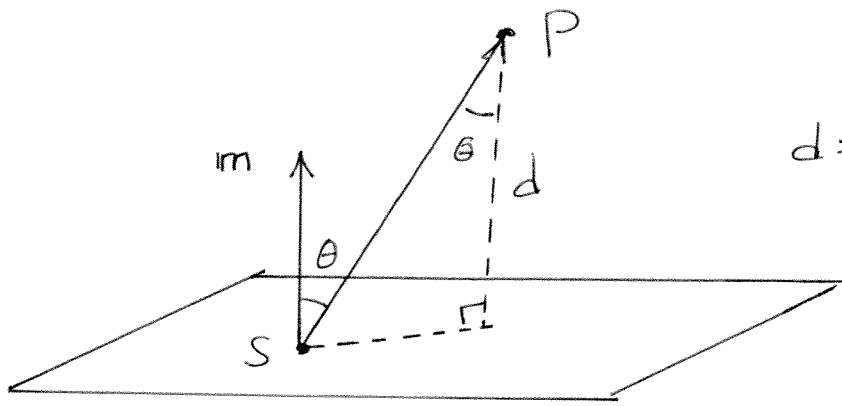
Avståndet d mellan punkten $P = (1, -1, 3)$ och en punkt $(2, -2, 3) + t(1, 1, -2)$ på linjen kan uttryckas med avståndsformeln:

$$d^2 = (2 + t - 1)^2 + (-2 + t - (-1))^2 + (3 - 2t - 2)^2 = 6t^2 - 4t + 3$$

Minimum av detta andragradspolynom hittas lätt med kvadratkomplettering eller derivering. Vi finner att $t = \frac{1}{3}$ ger minimalt $d^2 = \frac{7}{3}$, dvs $d = \sqrt{\frac{7}{3}}$. Vi hittar då genom insättning av $t = \frac{1}{3}$ i linjens ekvationer också närmaste punkten på linjen: $(\frac{13}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$ (som annars kan bestämmas med ortogonalprojektion av $\vec{TP}$ på linjen).

Fig. 1

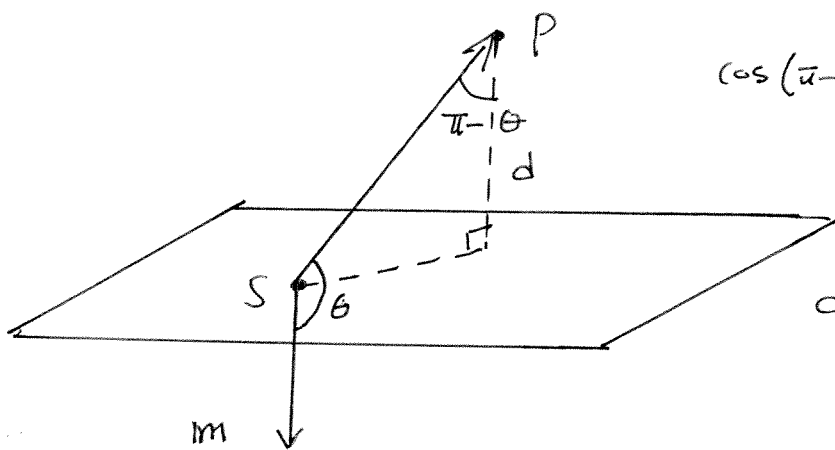
$$\Theta < \frac{\pi}{2}$$



$$d = |\vec{SP}| \cos \Theta$$

Fig. 2

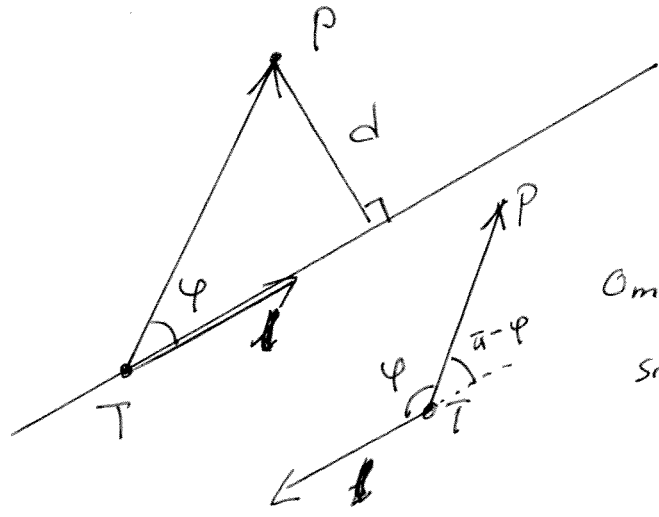
$$\Theta > \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{aligned} \cos(\pi - \Theta) &= -\cos \Theta \\ &= |\cos \Theta| \end{aligned}$$

$$d = |\vec{SP}| |\cos \Theta|$$

Fig. 3



$$d = |\vec{TP}| \cdot \sin \varphi$$

Om φ går åt "andra hållet":
 $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$