

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor hösten 2008 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast torsdag 22/10 em.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/0910/

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2t - m + v = 5 \\ t + m - v = -2 \\ 2t - 4m + v = -1 \end{cases}$$

b) Skriv det komplexa talet $(-2 + 2i)^6$ på formen $a + bi$. (2p)

c) Bestäm $(f^{-1})'(-1)$ om $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 5$. (2p)

d) Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = \sqrt{x^2 + 1}$. (2p)

e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sin x} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+1} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + x^9}{9^x + x^4}$$

f) Beräkna y' och y'' för $x = 0$, om y är en funktion av x given av sambandet $x^3 - 3xy + y^3 = 1$. (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Ange en ekvation för det plan som är parallellt med planet $x + y + z = 1$ och innehåller punkten $(1, 2, 3)$. (1p)

b) Ange i parameterform ekvationerna för skärningslinjen mellan planen $x + y + z = 2$ och $5x + 2y - z = 7$. (2p)

c) Beräkna avståndet mellan planen $x + y + z = 1$ och $x + y + z = 2$ (tro inte att det är 1!). (2p)

d) Vilken punkt i planet $2x + 2y - z = 0$ är närmast punkten $(4, 3, 5)$? (2p)

3. Bestäm definitionsområdet och värdemängden för funktionen $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ och skissera dess graf. (6p)

Var god vänd!

4. Skissa grafen av

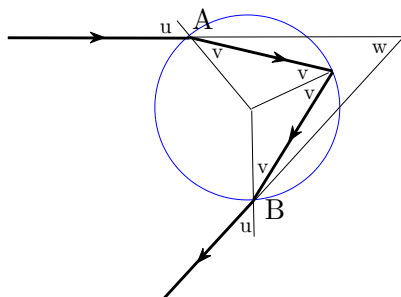
$$f(x) = \frac{x+1}{2x+3}e^{-x}$$

(6p)

och ange funktionens eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Konkavitet behöver inte utredas.

5. Figuren nedan visar en ljusstråles väg genom en klotformad vattendroppe. Ljusstrålen träffar droppens övre halva i A med infallsvinkeln u mot normalen till droppens yta, bryts därefter till vinkeln v enligt brytningslagen $\sin u = n \sin v$ (n är brytningsindexet för vatten, lite olika för olika färger, ligger mellan 1,32 och 1,34), reflekteras i droppens insida och bryts igen i B ut i luften. För att beräkna en regnbåges storlek, vill man maximera vinkeln w i figuren. Därvid varieras infallsvinkeln u i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ genom att läget A varieras med bibehållen riktning på inkommande strålen. Bestäm w som funktion av u och bestäm den vinkel u_{max} som maximerar w . (Regnbågens riktning bestäms av w_{max} .)

(6p)



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

(6p)

- Varje ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.
- Triangeln med hörn i punkterna $(1, 0, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(2, 1, -2)$ är rätvinklig.
- Om ingen av vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är nollvektorn och om $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, så måste $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ antingen ha samma eller motsatta riktningar.
- $a > b \Rightarrow a \geq b$
- Ekvationen $\ln x = e^{-x}$ har exakt en lösning.
- Om $f(x)$ och $g(x)$ är avtagande funktioner, så är $f(g(x))$ växande.

7. a) Formulera *medelvärdessatsen*.

(2p)

- b) Bevisa med hjälp av medelvärdessatsen att om $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$, så är f konstant i (a, b) .

(2p)

- c) Ge exempel på en funktion f som är deriverbar för alla $x > 0$ och är sådan att funktionen men inte dess derivata går mot 0 då $x \rightarrow \infty$.

(2p)

Lycka till!
/Lennart