

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2t - m + v = 5 \\ t + m - v = -2 \\ 2t - 4m + v = -1 \end{cases}$$

b) Skriv det komplexa talet $(-2 + 2i)^6$ på formen $a + bi$.

c) Bestäm $(f^{-1})'(-1)$ om $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 5$.

d) Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

e) Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sin x} \qquad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+1} \qquad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + x^9}{9^x + x^4}$$

f) Beräkna y' och y'' för $x = 0$, om y är en funktion av x given av sambandet $x^3 - 3xy + y^3 = 1$.

På denna uppgift skulle bara svar ges, men här ges kortfattade lösningar.

a) Elementära radoperationer överför systemets totalmatris i trappstegsform, här också i reducerad trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Svar: systemet har den entydiga lösningen $(\mathbf{t}, \mathbf{m}, \mathbf{v}) = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{5})$.

b) Kan lösas med polär form, men också enligt följande: $(-2 + 2i)^6 = ((-2 + 2i)^2)^3 = (4 - 8i - 4)^3 = -8^3 i^3 = 2^9 i = 512i$. Svar: **512i**.

c) Först konstaterar vi att $f(1) = -1$, så variabelvärdet $y = -1$ för inversen svarar mot variabelvärdet $x = 1$ för f . Då är

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5x^4 + 3x^2 + 2} \text{ och } (f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{10} \qquad \text{Svar: } \frac{1}{10}.$$

d) Bara sneda asymptoter är tänkbara (definierad överallt, går mot ∞ åt båda hållen). Vi

$$\text{beräknar därför } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x}$$

och får $k = -1$ då $x \rightarrow -\infty$ och $k = 1$ då $x \rightarrow \infty$.

Därefter beräknar vi $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx)$ och får $m = 0$ i båda fallen. Asymptoterna är $y = kx + m$. Svar: **y = ±x**

- e) i. $\frac{\ln(1+2x)}{\sin x} = \frac{2x \frac{\ln(1+2x)}{2x}}{x \frac{\sin x}{x}} = \frac{2 \frac{\ln(1+2x)}{2x}}{\frac{\sin x}{x}} \rightarrow 2$ (standardgränsvärden). Svar: **2**.
- ii. $(1 + \frac{3}{x})^{x+1} = (1 + \frac{3}{x})^x (1 + \frac{3}{x}) \rightarrow e^3 \cdot 1$. Svar: **e^3** .
- iii. Det dominerande uttrycket då $x \rightarrow \infty$ är 9^x . Vi förkortar med detta och får:

$$\frac{4^x + x^9}{9^x + x^4} = \frac{(\frac{4}{9})^x + \frac{x^9}{9^x}}{1 + \frac{x^4}{9^x}}.$$
 Alla de tre uttrycken som beror av x går mot noll (expfunktion med bas < 1 och satsen om styrkeförhållandena mellan potens- och expfunktioner). Svar: **0**.
- f) Vi använder implicit derivering. Först noterar vi att ekvationen ger att $y = 1$ då $x = 0$. Vi deriverar båda leden med avseende på x (produktregeln och kedjeregeln!):
 $3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0$.
 Sätt in $x = 0$, $y = 1$ och få $y' = 1$. Derivera igen.
 $6x - 3y' - 3y' - 3xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$.
 Sätt in $x = 0$, $y = 1$, $y' = 1$ och få $y'' = 0$. Svar: **$y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$** .
-

2. a) Ange en ekvation för det plan som är parallellt med planet $x + y + z = 1$ och innehåller punkten $(1, 2, 3)$.
- b) Ange i parameterform ekvationerna för skärningslinjen mellan planen $x + y + z = 2$ och $5x + 2y - z = 7$.
- c) Beräkna avståndet mellan planen $x + y + z = 1$ och $x + y + z = 2$ (tro inte att det är 1!).
- d) Vilken punkt i planet $2x + 2y - z = 0$ är närmast punkten $(4, 3, 5)$?
-

- a) Planet har samma normalvektor som det givna och kan därför skrivas $x + y + z = D$. Insättning av punkten $(1, 2, 3)$ i ekvationen ger $D = 6$. Svar: $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{6}$
- b) Punkterna på skärningslinjen motsvarar lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 2y - z = 7 \end{cases}$$

Vi löser detta system genom elimination. I matrisform får vi med elementära radoperationer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ur den sista matrisen får vi lösningarna med den fria variabeln $z = t$.

Därmed: De sökta ekvationerna är $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{1} + \mathbf{t}, \mathbf{1} - \mathbf{2t}, \mathbf{t})$.

- c) Avståndet mellan planen måste vara detsamma som avståndet mellan plan 2 och en punkt P i plan 1, vilket i sin tur är längden av ortogonala projektionen av en vektor $\vec{QP}$ på planens normalriktning, om Q står för en punkt i plan 2. Vi kan t ex välja $P = (1, 0, 0)$, $Q = (2, 0, 0)$ och normalvektorn $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$. Avståndet blir då

$$d = \frac{|\vec{QP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (1, 1, 1)|}{|(1, 1, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{Svar: avståndet är } \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- d) Den sökta punkten är skärningspunkten mellan normalen till planet genom $(4, 3, 5)$ och planet. Normalens ekvation(er) är $(x, y, z) = (4, 3, 5) + t(2, 2, -1)$. Skärningspunkten är lösning till systemet av dessa ekvationer och planets. Sätt därför in uttrycken för x, y och z i planets ekvation och lös ut t för skärningspunkten: $2(4 + 2t) + 2(3 + 2t) - (5 - t) = 0$. Lösningen $t = -1$ sätts in i linjens ekvationer och ger Svar: **punkten är $(2, 1, 6)$** . (Uppgiften kan också lösas med ortogonalprojektion).
-

3. Bestäm definitionsmängden och värdemängden för funktionen

$f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ och skissera dess graf.

Vi bestämmer först definitionsmängden. Den bestäms av villkoret $8-x^2 \geq 0$, vilket innebär att $\mathcal{D}(f) = [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$. Funktionen är kontinuerlig i hela detta intervall och deriverbar utom i ändpunkterna $\pm\sqrt{8}$ med derivatan $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{8-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-x^2}}(-2x) = \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$.

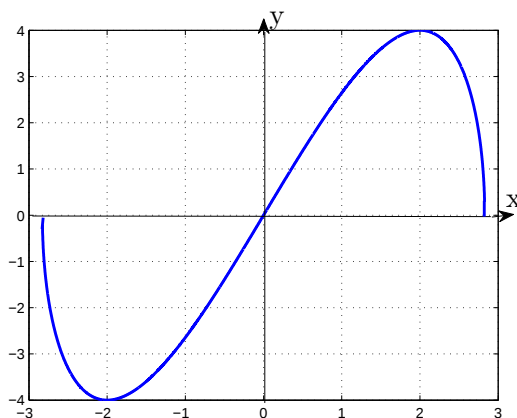
Vi teckenstuderar derivatan och får följande tabell:

x	$-\sqrt{8}$	<	-2	<	2	<	$\sqrt{8}$
$f'(x)$	$(-\infty)$	-	0	+	0	-	$(-\infty)$
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Ur detta drar vi slutsatsen att funktionen har lokalt och absolut minimum $= -4$ i $x = -2$ samt lokalt och absolut maximum $= 4$ i $x = 2$. Då funktionen är kontinuerlig säger satsen om mellanliggande värde att den antar *alla* värden däremellan.

Därmed svarar vi:

$$\mathcal{D}(f) = [-\sqrt{8}, \sqrt{8}], \quad \mathcal{R}(f) = [-4, 4].$$



4. Skissa grafen av

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+3}e^{-x}$$

och ange funktionens eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Konkavitet behöver inte utredas.

Funktionen f är definierad för alla reella x utom $x = -\frac{3}{2}$. Eftersom $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -\frac{3}{2}^-$ och $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow -\frac{3}{2}^+$, så är linjen $x = -\frac{3}{2}$ en asymptot.

Eftersom $f(x) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ då $x \rightarrow \infty$, så är linjen $y = 0$ en asymptot.

Då $x \rightarrow -\infty$ gäller att $f(x) \rightarrow \infty$ och $\frac{f(x)}{x} \rightarrow -\infty$, så asymptot saknas då $x \rightarrow -\infty$.

Vi deriverar nu och söker derivatans nollställen.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2x+3) - (x+1) \cdot 2}{(2x+3)^2} e^{-x} + \frac{x+1}{2x+3} (-e^{-x}) = \frac{-(x+2)(2x+1)}{(2x+3)^2} e^{-x}$$

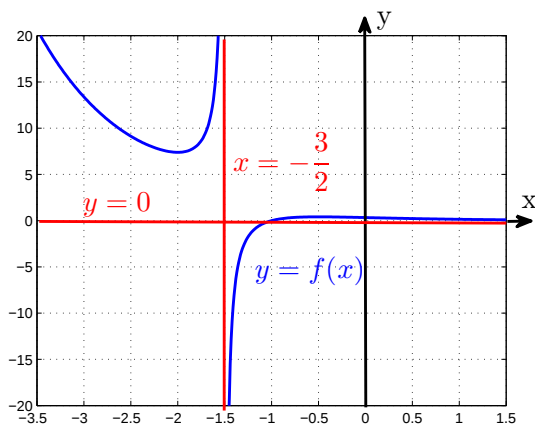
Teckentabell:

x	$-\infty$	$<$	-2	$<$	$-\frac{3}{2}$	$<$	$-\frac{1}{2}$	$<$	∞
f'(x)		$-$	0	$+$	Odef	$+$	0	$-$	
f(x)	∞	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	Odef	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{e}}{4}$	$\searrow$	0

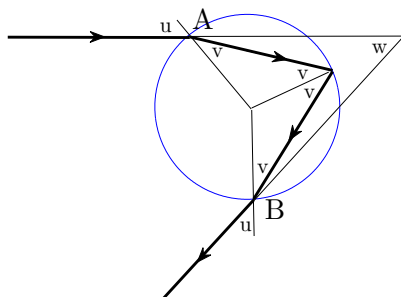
Lokalt minimum $f(-2) = e^2$

Lokalt maximum: $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{4}$

Asymptoter: $x = -\frac{3}{2}$, $y = 0$



5. Figuren nedan visar en ljusstråles väg genom en klotformad vattendroppe. Ljusstrålen träffar droppens övre halva i A med infallsvinkeln u mot normalen till droppens yta, bryts därefter till vinkeln v enligt brytningslagen $\sin u = n \sin v$ (n är brytningsindexet för vatten, lite olika för olika färger, ligger mellan 1,32 och 1,34), reflekteras i droppens insida och bryts igen i B ut i luften. För att beräkna en regnbåges storlek, vill man maximera vinkeln w i figuren. Därvid varierar infallsvinkeln u i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ genom att läget A varierar med bibehållen riktning på inkommande strålen. Bestäm w som funktion av u och bestäm den vinkel u_{max} som maximerar w . (Regnbågens riktning bestäms av w_{max} .)



Punkterna A , B , cirkelns medelpunkt och punkten vid w bildar en fyrhörning. Dess vinkelsumma är 2π , detta gör att vi kan beräkna w :

$$2(u + \pi - 2v) + w = 2\pi \Rightarrow w = 4v - 2u$$

$$\text{Ur brytningslagen får vi } \sin v = \frac{\sin u}{n} \Rightarrow v = \arcsin \frac{\sin u}{n}$$

Detta ger oss w som funktion av u :

$$w = 4 \arcsin \frac{\sin u}{n} - 2u, \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

För att söka maximum deriverar vi:

$$\frac{dw}{du} = 4 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\sin u}{n})^2}} \frac{\cos u}{n} - 2 = \frac{4 \cos u}{\sqrt{n^2 - \sin^2 u}} - 2$$

Derivatans nollställe(n) ges av ekvationen

$$2 \cos u = \sqrt{n^2 - \sin^2 u} \Rightarrow 4 \cos^2 u = n^2 - \sin^2 u$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 u = \frac{4 - n^2}{3}$$

Ingen falsk rot om $n \leq 2$, men enda nollstället i $[0, \frac{\pi}{2}]$ är $u = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$ ($n \approx 1,33$ för vatten). Derivatans är positiv i intervallets början och negativ i slutet, alltså

har vi ett maximum: $u_{max} = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$.
(Med $n = 1,33$ är $u_{max} \approx 59,6^\circ$ och $w_{max} \approx 42,5^\circ$.)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

- a) Varje ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.
- b) Triangeln med hörn i punkterna $(1, 0, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(2, 1, -2)$ är rätvinklig.
- c) Om ingen av vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är nollvektorn och om $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, så måste $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ antingen ha samma eller motsatta riktningar.
- d) $a > b \Rightarrow a \geq b$
- e) Ekvationen $\ln x = e^{-x}$ har exakt en lösning.
- f) Om $f(x)$ och $g(x)$ är avtagande funktioner, så är $f(g(x))$ växande.

- a) **Falskt.** Exempel: $x + y = 2$, $x - y = 0$, $x + 2y = 3$ har lösningen $x = y = 1$.
- b) **Sant.** Bilda vektorer av sidorna vid hörnet $(1, 0, 1)$: $\mathbf{u} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, -3)$. Deras skalärprodukt är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$. Alltså rät vinkel i det hörnet!
- c) **Sant.** Eftersom $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0$ om ingen av vektorerna är nollvektorn, så måste vinkeln θ mellan vektorerna vara 0 eller π .
- d) **Sant.** Om **någon** av utsagorna $a > b$ eller $a = b$ är sann, så är utsagan $a \geq b$ sann.
- e) **Sant.** Vänster led minus höger led är en kontinuerlig och växande funktion, positiv i $x = 1$ och negativ i $x = e$. Satsen om mellanliggande värde garanterar ett nollställe mellan 1 och e , och växandet gör att värdet noll antas bara en gång.
- f) **Sant.** Tolkningen av avtagande funktion ger att $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ vilket innebär att den sammansatta funktionen är växande.

7. a) Formulera *medelvärdessatsen*.

b) Bevisa med hjälp av medelvärdessatsen att om $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$, så är f konstant i (a, b) .

c) Ge exempel på en funktion f som är deriverbar för alla $x > 0$ och är sådan att funktionen men inte dess derivata går mot 0 då $x \rightarrow \infty$.

a) Se R. A. Adams sid 136!

b) Ta två punkter $x_1 < x_2$ i (a, b) . Om f är deriverbar i hela (a, b) så är förutsättningarna för medelvärdessatsen uppfyllda i $[x_1, x_2]$. Kontinuiteten följer ju av deriverbarheten. Då finns ett $c \in (x_1, x_2)$ så att $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$, dvs $f(x_1) = f(x_2)$. Detta gäller för varje par av punkter i intervallet, därmed är f konstant i intervallet.

c) Ett exempel är $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$. Eftersom $-\frac{1}{x} < f(x) < \frac{1}{x}$, så går $f(x)$ mot noll pga instängningsregeln då $x \rightarrow \infty$.

Derivatan är $f'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{1}{x^2} \sin x^2$ som saknar gränsvärde då $x \rightarrow \infty$ (andra termen går mot noll analogt med $f(x)$, den första pendlar mellan -2 och 2).
