

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor hösten 2008 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast måndag 18/1.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/0910/

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Lös ekvationssystemet

(2p)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

b) Skriv det komplexa talet $z = -1 + \sqrt{3}i$ på formen $re^{i\theta}$.

(2p)

c) Bestäm alla rella tal x sådana att

(2p)

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{2 - x} \geq 0$$

d) Bestäm alla lösningar till ekvationen $2 \sin x \cos x = 1 - 2 \sin^2 x$.

(2p)

e) Beräkna följande gränsvärden:

(3p)

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(x^2 - x) - \ln(x^2 - 1))$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan^3 2x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{e^x - 1}$

f) Bestäm en ekvation för tangenten i punkten $(x, y) = (1, 1)$ till kurvan $y = y(x)$ som ges av $\sqrt{x} + y + \sqrt{y} = 3$.

(3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Följande punkter är givna:

$$A = (0, 1, 3), B = (1, 1, 1), C = (4, 5, 3) \text{ och } D = (1, 10, 1).$$

a) Bestäm en ekvation i parameterform för räta linjen genom A och B .

(1p)

b) Ange en ekvation för planet som innehåller A , B och C .

(3p)

c) Beräkna minsta avståndet från D till planet i b).

(3p)

3. Bestäm definitionsområdet och värdemängden för funktionen

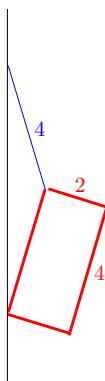
(5p)

$$\ln(8 + 2x - x^2).$$

Var god vänd!

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2/x & \text{om } 0 < x \leq 2 \\ e^{4-x} & \text{om } 2 < x < 4 \end{cases}$ (6p)

5. En cylindrisk burk med diametern 2 dm och höjden 4 dm är upphängd i ett snöre av längden 4 dm. Snörets ena ände är fäst vid en lodrät vägg, den andra i burkens övre kant (se figur!). Burken antas ha sin tyngdpunkt T i mitten, dvs i symmetriaxeln på halva höjden. Enligt mekanikens lagar ska burkens tyngdpunkt befinna sig så lågt som möjligt (vi bortser då från friktionen mellan burken och väggen). Beräkna vinkeln mellan snöret och väggen i detta läge.
Ledning: skriv gärna höjdskillnaden mellan snörets fästpunkt och burkens tyngdpunkt som en funktion av nämnda vinkel. (6p)



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)
- a) Imaginärdelen av ett komplext tal är ett reellt tal.
 - b) Ett linjärt ekvationssystem som har fler obekanta än ekvationer måste ha mer än en lösning.
 - c) Triangeln med hörn i punkterna $(1, 2, 0)$, $(2, 3, 1)$ och $(2, 0, -2)$ har en vinkel som är större än 90° .
 - d) Ekvationen $x^{101} + x^{51} + x - 1 = 0$ har exakt en reell rot.
 - e) Om f är en växande inverterbar funktion, så kan dess invers f^{-1} vara avtagande.
 - f) Det finns en funktion f sådan att $f''(x) > 0$ för alla reella tal x och som har tre olika reella nollställen.
7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x . (1p)
- b) Bevisa att deriverbarhet medför kontinuitet. (2p)
- c) Bevisa med derivatans definition att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$. (3p)

Lycka till!
/Lennart