MATEMATIK
Chalmers

Lösningar till tenta i Inledande matematik för TMV125, 2010-01-16

---

1. Till denna uppgift skulle ges bara svar, men här kommer korta lösningar.

   a) Vi överför systemets totalmatris till reducerad trappstegsform: $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

   Lösning:
   $$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 0 \end{cases}$$

   b) $|-1+\sqrt{3}i| = 2,\ arg(-1+\sqrt{3}i) = \dfrac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad -1+\sqrt{3}i = \mathbf{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

   c)
   $$\frac{x^2+2x+2}{2-x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2+1}{2-x} \geq 0$$
   Täljaren är alltid större än noll, så uttrycket blir aldrig lika med noll, men det är större än noll precis då $\mathbf{x < 2}$.

   d) $2\sin x \cos x = 1 - 2\sin^2 x \quad \Longleftrightarrow \quad \sin 2x = \cos 2x \quad \Longleftrightarrow \quad \tan 2x = 1$ ($\cos 2x = 0$ ger $\sin 2x \neq 0$)

   Denna ekvation har lösningarna $2x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, dvs $\mathbf{x} = \dfrac{\pi}{\mathbf{8}} + \mathbf{n} \cdot \dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$

   e) i. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(\ln(x^2-x) - \ln(x^2-1)) = \lim_{x\to 1} \ln \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1))} = \lim_{x\to 1} \ln \frac{x}{x+1} = \ln\frac{1}{2} = -\ln \mathbf{2}$

   ii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\tan^3 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 \left(\frac{2}{\cos 2x}\right)^3} = \frac{1}{1^3 2^3} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

   iii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \frac{2}{\frac{e^x-1}{x}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = \mathbf{2}$

   f) Derivera ekvationens båda led med avseende på x (*implicit derivering*):
   $$\frac{1}{2\sqrt{x}} + y' + \frac{1}{2\sqrt{y}} y' = 0$$
   $$x = y = 1 \ \Rightarrow \ y' = -\frac{1}{3}$$
   Tangentens ekvation:
   $$y - 1 = -\frac{1}{3}(x-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x + 3y = 4}$$

2. a) En riktningsvektor för linjen är $\vec{AB} = (1,1,1) - (0,1,3) = (1,0,-2)$. Utgående från punkten $A = (0,1,3)$ har vi parameterekvationen för linjen: $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{3}) + \mathbf{t}(\mathbf{1},\mathbf{0},-\mathbf{2})$

   b) Två vektorer i planet är $\vec{AB} = (1,0,-2)$ och $\vec{AC} = (4,4,0) = 4(1,1,0)$. En normalvektor till planet är då kryssprodukten av dessa:
   $$\boldsymbol{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2,-2,1)$$
   Planets ekvation är då $\boldsymbol{n} \cdot (x-0, y-1, z-3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(x-0) - 2(y-1) + (z-3) = 0 \quad \Longleftrightarrow$ $\mathbf{2x - 2y + z = 1}$

   c) Avståndet är absolutbeloppet av skalära projektionen av vektorn $\vec{AD} = (1,9,-2)$ på planets normalvektor $\boldsymbol{n} = (2,-2,1)$:
   $$d = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \vec{AD}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|2-18-2|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \mathbf{6}$$

3. $f(x) = \ln(8 + 2x - x^2)$ är definierad då och endast då $8 + 2x - x^2 > 0 \iff (x+2)(4-x) > 0$ $\iff -2 < x < 4$, dvs **definitionsmängden är** $\mathcal{D}_\mathbf{f} = (\mathbf{-2, 4})$.

Vi deriverar f för att undersöka dess variation:

$f'(x) = \dfrac{2 - 2x}{8 + 2x - x^2}$, som har enda nollstället $x = 1$ med teckenväxlingen $+0-$, alltså ett lokalt (och absolut) maximum med värdet $f(1) = \ln 9$.

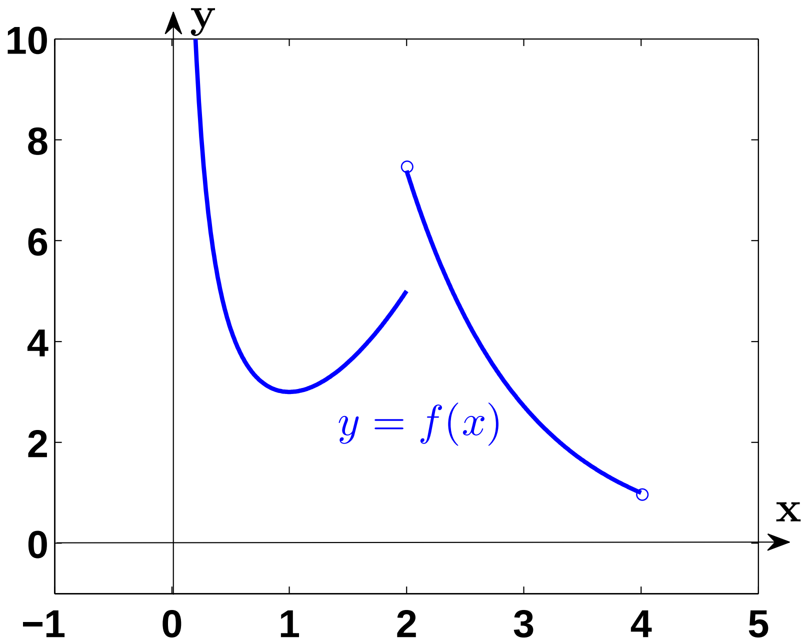
Vidare konstaterar vi att $f(x) \Rightarrow -\infty$ då $x \to -2^+$ och då $x \to 4^-$.
Vi ser nu att **värdemängden är** $\mathcal{V}_\mathbf{f} = (-\infty, \ln \mathbf{9})$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2/x & \text{om } 0 < x \leq 2 \\ e^{4-x} & \text{om } 2 < x < 4 \end{cases}$ Derivera: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2/x^2 & \text{om } 0 < x < 2 \\ -e^{4-x} & \text{om } 2 < x < 4 \end{cases}$

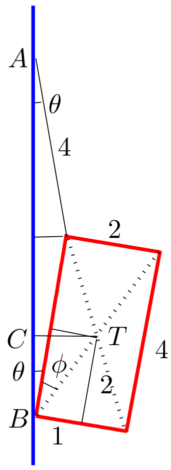
Vi konstaterar att $f(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$, så **y-axeln** $(x = 0)$ **är en asymptot.**
Funktionen saknar derivata i $x = 2$, men har vänster- och högerderivata där:
$f'_-(2) = 3,5, \quad f'_+(2) = -e^2$.
Enda nollstället för derivatan är $x = 1$.
Vi gör en teckentabell:

x	0		1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	odef	$-$	
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	3	$\nearrow$	$5e^{-2}$	$\searrow$	(1)

Härav ser vi att f har ett **lokalt minimum i** $\mathbf{x = 1}$.



5. Med beteckningar enligt figuren: maximera sträckan AC!
$AB = 2 \cdot 4\cos\theta = 8\cos\theta$
$BC = BT\cos(\phi+\theta) = (BT\cos\phi)\cos\theta - (BT\sin\phi)\sin\theta =$ (se figuren!) $= 2\cos\theta - 1\sin\theta$ Vi kan nu uttrycka höjdskillnaden mellan fästpunkten A och tyngdpunkten T:
$AC = AB - AC = 6\cos\theta + \sin\theta =: f(\theta),\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
Derivera: $f'(\theta) = -6\sin\theta + \cos\theta, \quad f'(\theta) = 0 \iff \tan\theta = \frac{1}{6}$
Derivatans teckenväxling är $+0-$ (eftersom sin växer och cos avtar), alltså maximum. Den sökta vinkeln är alltså arctan $\mathbf{\frac{1}{6}}$ ($\approx \mathbf{9,5}°$).



6. a) **Sant.** Se definitionen av real- och imaginärdel!

b) **Falskt.** Exempel: Systemet
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$
saknar lösning.

c) **Sant.** Bilda två vektorer i planet: $\boldsymbol{u} = (2,3,1)-(1,2,0) = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v} = (2,0,-2)-(1,2,0) = (1,-2,-2)$. Deras skalärprodukt är $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = -3$, alltså negativ, vilket betyder att vinkeln vid punkten $(1,2,0)$ är större än $90°$.

d) **Sant.** Derivatan av vänsterledet $f(x)$ är positiv för all reella x. Därmed är f (strängt) växande och kan ha högst ett nollställe. Vidare är $f(0) = -1,\ f(1) = 2$, så pga satsen om mellanliggande värde (f kontinuerlig!) antas värdet noll i intervallet $(0,1)$.

e) **Falskt.** Att f är växande innebär: $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$. Om inversen vore avtagande, skulle vi få $y_1 < y_2 \ \Rightarrow\ x_1 = f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2) = x_2$, vilket motsäger det föregående.

f) **Falskt.** Antag $x_1 < x_2 < x_3$ och $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Då skulle Rolles sats, använd på f, ge att det finns $c_1 \in (x_1,x_2)$ och $c_2 \in (x_2,x_3)$ med $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Eftersom f'' existerar för alla reella x kan vi använda Rolles sats även på f' i intervallet $[c_1,c_2]$, vilket ger oss en punkt $c \in (c_1,c_2)$ med $f''(c) = 0$. Detta motsäger förutsättningen $f''(x) > 0$ för alla reella x.

7. Se Adams!

MATEMATIK
Chalmers