

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor hösten 2009 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast onsdag 25/8.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/0910/

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Beräkna $|z|$ om $z = \cos(5\pi/12) + i \sin(5\pi/12)$. (2p)

b) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ -x + z = -4 \end{cases}$$
. (2p)

c) För vilka funktioner f som är definerade på $\mathbb{R}$ gäller det att $f'(x) = 0$ för alla x ? (2p)

d) Bestäm samtliga asymptoter till $f(x) = x + \frac{1}{x}$. (2p)

e) Låt $f(x) = \sin(x^2)/x$. Beräkna följande gränsvärden: (3p)

i. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{\ln(1 + x)}$

f) För vilka x gäller olikheten $|x - 1| \geq |x - 5|$? (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Ange alla vektorer i planet som är vinkelräta mot (a, b) , där (a, b) ej är nollvektorn. (1p)

b) Låt L vara skärningslinjen mellan planen med ekvationerna $x + 2y + z = 4$ och $2x + 4y - 3z = 13$. Bestäm en ekvation för L på parameterform. Du får svara antingen på vektorform eller komponent för komponent. (2p)

c) Beräkna volymen av parallelepipeden med hörn i $(2, 4, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(-1, 0, 1)$ och i origo, och med tre av sina kanter utgående från origo till de övriga givna punkterna. (3p)

3. a) Låt $a > 0$ vara en konstant och $f(x) = 1/x - ax$. Vad är det minsta värdet f antar på intervallet $(0, 1]$? (3p)

b) Vilket är det största värdet a kan anta så att funktionen $g(x) = x \ln x - ax^3/6$ är konvex (concave up) på intervallet $(0, 1]$? (3p)

Var god vänd!

4. Skissa grafen av funktionen (6p)

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

Ange lokala extrempunkter och asymptoter.

5. Funktionen f definieras så att $f(a)$ är den minsta positiva lösningen till ekvationen $x = ax^2 + 1$ (till exempel blir $f(0) = 1$). Ange definitions-mängden för f . (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- a) Om f är en växande funktion så är inversen f^{-1} avtagande.
- b) Det finns en invers till $f(x) = \sin(x)$ på varje intervall av längd mindre än 2π .
- c) Ett tredjegradspolynom med reella koefficienter har alltid minst ett reellt nollställe.
- d) En av logaritmlagarna lyder $(\ln a)^b = b \ln a$.
- e) Ekvationen $x^2 = e^x$ har exakt två lösningar.
- f) Om t är reellt, så är $|e^{-it}| = 1$.

7. a) Definera *kontinuitet* för en funktion i en punkt. (1p)
- b) Definera *derivatan* av en funktion i en punkt. (1p)
- c) Visa att deriverbarhet medför kontinuitet. (2p)
- d) Bevisa med hjälp av medelvärdessatsen att en funktion som har positiv derivata i ett intervall är växande i detta intervall. (3p)

Lycka till!
/Lennart

Lösningar

1. a) Ett komplext tal på formen $r(\cos v + i \sin v)$ har absolutbeloppet r .

Här är tydligen $r = 1$

Svar: $|z| = 1$.

- b) **Svar:** $(x, y, z) = (-8, 7, -12)$.

- c) Det följer av medelvärdessatsen att en funktion vars derivata är 0 måste vara konstant, och omvänt är ju derivatan av varje konstant funktion 0.

Svar: Alla konstanta funktioner.

- d) Eftersom $|f(x)| \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^\pm$, så är $x = 0$ vertikal asymptot. För att finna den sneda asymptoten räcker det att observera att $f(x)$ är summan av $1/x$ och x , där den ena termen har gränsvärdet noll och den andra är en linjär funktion.

Svar: Sned asymptot $y = x$ och vertikal asymptot $x = 0$.

- e) i. Gränsvärdet är noll eftersom $\sin x^2$ är begränsad och $1/x \rightarrow 0$.

Svar: 0.

- ii. Vi måste först beräkna $f'(x)$, som är

$$f'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}.$$

Den andra termen har gränsvärde noll enligt resonemanget i den första deluppgiften. Den första termen pendlar oändligt många gånger mellan -1 och 1 , så $f'(x)$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow \infty$.

Svar: Existerar inte.

- iii. Funktionen är en produkt av $x + 1$ och $\frac{x}{\ln(1+x)}$. Den första har gränsvärdet 1 och det har även den andra (detta är ett standardgränsvärde). Gränsvärdet blir produkten av dessa två gränsvärden, alltså 1.

Svar: 1.

- f) Ekvationen kan tolkas som "avståndet mellan x och 1 är större än eller lika med avståndet mellan x och 5". Detta gäller om x ligger på medelpunkten mellan 1 och 5 på tallinjen eller till höger om denna. Medelpunkten är $(1 + 5)/2 = 3$.

Svar: $x \geq 3$.

2. (a) Vi använder oss av skalärprodukten: (x, y) är vinkelrät mot (a, b) om och endast om $(x, y) \cdot (a, b) = ax + by = 0$. En lösning till denna ekvation är $(x, y) = (-b, a)$. Alla andra lösningar bildar en linje parallell med denna dvs $(x, y) = t(-b, a)$ där $t \in \mathbb{R}$.

Svar: $\{t(-b, a) : t \in \mathbb{R}\}$.

- (b) Vi måste lösa ekvationssystemet som består av ekvationerna $x + 2y + z = 4$ och $2x + 4y - 3z = 13$. Genom radoperationer får vi det ekvivalenta systemet som består av $x + 2y = 5$ och $z = -1$. Vi har y som fri variabel och får då lösningen:

Svar: $(x, y, z) = (5 - 2t, t, -1)$.

- (c) Volymen kan beräknas med hjälp av determinanten som

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |-1| = 1.$$

Svar: Volymen är 1.

3. (a) Derivatans är $f'(x) = -(1/x^2 + a)$, vilket är strängt negativt för alla $x > 0$. Alltså är funktionen strängt avtagande, så den antar sitt minimum i den högra ändpunkten $x = 1$, och där är funktionsvärdet $f(1) = 1 - a$.

Svar: $1 - a$, antas i $x = 1$.

- (b) Funktionen är konvex om $g''(x) \geq 0$ på intervallet. Vi har att $g''(x) = 1/x - ax$, dvs samma funktion som i (a). Denna funktion är ≥ 0 om och endast om dess minimum är ≥ 0 . Alltså om och endast om $1 - a \geq 0$.

Svar: $a = 1$ är det största värdet.

4. Vi kan t.ex. börja med att bestämma sneda asymptoter. Det enklaste sättet är att utföra polynomdivision. Vi får då

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1}.$$

Därför är $y = x - 1$ en sned asymptot, ty den andra termen är en restterm som har gränsvärdet noll i oändligheten. Man kan också använda den vanliga metoden att bestämma k och m .

Nämnaren $x + 1$ ger upphov till en vertikal asymptot $x = -1$. Eftersom $x^2 + 1$ alltid är positivt och $x + 1$ växlar tecken då vi passerar den vertikala asymptoten ser vi att $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$. Vi ritar in detta i grafen och kontrollerar sedan att det verkar stämma

överens med eventuella extrempunkter.
Vi beräknar nu derivatan $f'(x)$.

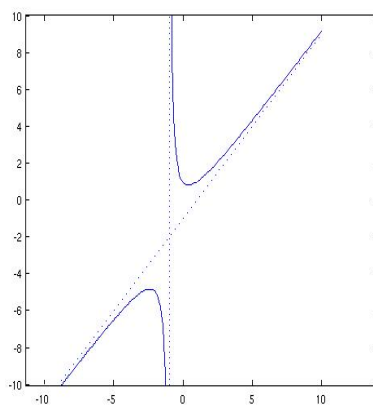
$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

Nämnaren ovan är alltid positiv, så täljaren avgör tecken för funktionen (och därmed på vilka intervall funktionen växer och avtar). Vi faktorerisar nu nämnaren genom att lösa ekvationen $x^2 + 2x - 1 = 0$, vilket ger

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2}).$$

x	$-\infty$	$<$	$-1 - \sqrt{2}$	$<$	-1	$<$	$-1 + \sqrt{2}$	$<$	∞
f'(x)	(1)	+	0	-	$\notin$	-	0	+	(1)
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	$\notin$	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	∞

Teckentabellen visar att $f(x)$ är växande på $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$, avtar sedan i $(-1 - \sqrt{2}, -1)$ och i $(-1, -1 + \sqrt{2})$ och växer slutligen på $(-1 + \sqrt{2}, \infty)$. Alltså är $-1 - \sqrt{2}$ en lokal maxpunkt och $-1 + \sqrt{2}$ en lokal minpunkt. Detta är konsistent med sättet som grafen närmar sig den vertikala asymptoten. Nedan finns en icke skalenlig plot från matlab.



Figur 1: $y = \frac{x^2+1}{x+1}$, $x = -1$ och $y = x - 1$

5. För $a < 0$ är högerledet av ekvationen $x = ax^2 + 1$ ett polynom vars graf har maximum $f(0) = 1$, är växande för negativa x och avtagande för positiva och går mot $-\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$. Detta innebär att den skär grafen till vänsterledet $y = x$ en gång då $x < 0$ och en gång då $x > 0$, allt på grund av kontinuitet och enligt satsen om mellanliggande värde (Intermediate Value Theorem). Så som konstaterades i texten är f definierad i $a = 0$ ($f(0) = 1$), så definitionsmängden $\mathcal{D}(f)$ innehåller alla icke-positiva tal. För $a > 0$ löser vi ekvationen $x = ax^2 + 1$ och får $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}$, varvid vi ser att skärningspunkt(er) finns för alla a i intervallet $(0, \frac{1}{4}]$. Sammantaget har vi nu
Svar: $\mathcal{D}(f) = (-\infty, \frac{1}{4}]$.
6. a) **Falskt.** T. ex. är $f(x) = x$ sin egen invers, både f och f^{-1} alltså växande. I själva verket är det generellt så att en växande inverterbar funktion har en växande invers.
- b) **Falskt.** T. ex. på intervallet $[0, \pi]$ saknas invers. Man måste välja ett intervall där $\sin x$ är monoton för att kunna invertera.
- c) **Sant.** Ett sådant polynom går mot $-\infty$ och ∞ då $x \rightarrow -\infty$ respektive $x \rightarrow \infty$, eller tvärtom. Då polynom är kontinuerliga, så följer påståendet av satsen om mellanliggande värde (Intermediate Value Theorem).
- d) **Falskt.** T. ex. är $(\ln e)^2 = 1$, $2 \ln e = 2$. (Däremot gäller $\ln a^b = b \ln a$.)
- e) **Falskt.** För $x < 0$ finns uppenbarligen exakt en lösning (rita graferna för båda leden!). För $x \geq 0$ har funktionen $\frac{x^2}{e^x}$ sitt största värde $\frac{4}{e^2} < 1$ för $x = 2$ (derivera!), annars är alltså $x^2 < e^x$.
- f) **Sant.** $|e^{-it}| = |\cos t - i \sin t| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = 1$. (Jfr 1(a)!)
7. Se Adams avsnitt 1.4 (definition 4), 2.2 (definition 4), 2.3 (sats 1) respektive 2.8 (sats 12).