

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor hösten 2009 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast onsdag 25/8.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/0910/

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Beräkna $|z|$ om $z = \cos(5\pi/12) + i \sin(5\pi/12)$. (2p)

b) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ -x + z = -4 \end{cases}.$$
 (2p)

c) För vilka funktioner f som är definerade på $\mathbb{R}$ gäller det att $f'(x) = 0$ för alla x ? (2p)

d) Bestäm samtliga asymptoter till $f(x) = x + \frac{1}{x}$. (2p)

e) Låt $f(x) = \sin(x^2)/x$. Beräkna följande gränsvärden: (3p)

i. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{\ln(1 + x)}$

f) För vilka x gäller olikheten $|x - 1| \geq |x - 5|$? (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Ange alla vektorer i planet som är vinkelräta mot (a, b) , där (a, b) ej är nollvektorn. (1p)

b) Låt L vara skärningslinjen mellan planen med ekvationerna $x + 2y + z = 4$ och $2x + 4y - 3z = 13$. Bestäm en ekvation för L på parameterform. Du får svara antingen på vektorform eller komponent för komponent. (2p)

c) Beräkna volymen av parallelepipeden med hörn i $(2, 4, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(-1, 0, 1)$ och i origo, och med tre av sina kanter utgående från origo till de övriga givna punkterna. (3p)

3. a) Låt $a > 0$ vara en konstant och $f(x) = 1/x - ax$. Vad är det minsta värdet f antar på intervallet $(0, 1]$? (3p)

b) Vilket är det största värdet a kan anta så att funktionen $g(x) = x \ln x - ax^3/6$ är konvex (concave up) på intervallet $(0, 1]$? (3p)

Var god vänd!

4. Skissa grafen av funktionen (6p)

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

Ange lokala extrempunkter och asymptoter.

5. Funktionen f definieras så att $f(a)$ är den minsta positiva lösningen till ekvationen $x = ax^2 + 1$ (till exempel blir $f(0) = 1$). Ange definitions-mängden för f . (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- a) Om f är en växande funktion så är inversen f^{-1} avtagande.
- b) Det finns en invers till $f(x) = \sin(x)$ på varje intervall av längd mindre än 2π .
- c) Ett tredjegradspolynom med reella koefficienter har alltid minst ett reellt nollställe.
- d) En av logaritmlagarna lyder $(\ln a)^b = b \ln a$.
- e) Ekvationen $x^2 = e^x$ har exakt två lösningar.
- f) Om t är reellt, så är $|e^{-it}| = 1$.

7. a) Definera *kontinuitet* för en funktion i en punkt. (1p)
- b) Definera *derivatan* av en funktion i en punkt. (1p)
- c) Visa att deriverbarhet medför kontinuitet. (2p)
- d) Bevisa med hjälp av medelvärdessatsen att en funktion som har positiv derivata i ett intervall är växande i detta intervall. (3p)

Lycka till!
/Lennart