Tentamen 2010-10-23 : Lösningar

---

1. (a) Antingen har täljare och nämnare samma tecken, eller så är täljaren lika med noll. Detta ger två fall:

$$x - 5 \geq 0 \text{ och } 3 - x > 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ och } x < 3, \text{ en motsägelse,}$$

eller

$$x - 5 \leq 0 \text{ och } 3 - x < 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \text{ och } x > 3, \Leftrightarrow x \in (3, 5].$$

Svar : $x \in (3, 5]$.

(b) Systemets utökade matris är

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -1 & 4 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Via radoperationer förvandlas systemet till trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

I den sista raden står pivotelementet i högerledet (utläst: $0 = 2$, en motsägelse) vilket innebär att systemet saknar lösningar.

(c) Linjen $x = 3$ är en lodrät asymptot, eftersom $y \to -\infty$ då $x \to 3$. När $x \to \pm\infty$ så går $y - (2x - 3) = \frac{1-x}{(x-3)^2}$ mot noll då $x \to \pm\infty$, vilket innebär att linjen $y = 2x - 3$ är en sned asymptot.

(d) Kalla vinkeln över horisonten för θ och ballongens höjd för h. Båda dessa är funktioner av tiden. Vi söker dh/dt i det ögonblick där $\theta = \pi/4$. Det är också givet att $d\theta/dt = 0,025$. Från geometrin ser vi att förhållandet mellan h och θ är

$$\tan\theta = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100 \tan\theta.$$

Deriverar vi båda leden m.a.p. t så får vi att

$$\frac{dh}{dt} = 100(1 + \tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt}.$$

Insättning av $\theta = \pi/4$ ger alltså

$$\frac{dh}{dt} = 100(1 + 1^2) \cdot 0,025 = 5\ m/s.$$

(e) (α) Gränsvärdet är noll. Exponentialen i nämnaren slår polynomet och logaritmen i täljaren.

(β) Vi använder standardgränsvärdet

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Vi förkortar bråket med x:

$$\frac{4x + \sin x}{2x + \sin x} = \frac{4 + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}} \to \frac{4+1}{2+1} \to \frac{5}{3} \text{ då } x \to 0$$

SVAR : Gränsvärdet är 5/3.

(γ) Här använder vi standardgränsvärdet

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n = e^a$$

Vi skriver om uttrycket som

$$\left[\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x\right]^2$$

och därmed härleder direkt att gränsvärdet är $(e^5)^2 = e^{10}$.

(f) För $x \in [-1, 1]$ är

$$\arccos x = \text{den unika vinkel } \theta \in [0, \pi] \text{ sådan att } \cos\theta = x.$$

Per definition av $f(x)$ har vi i stället, för $x \in [-1, 1]$, att

$$f^{-1}(x) = \text{den unika vinkel } \psi \in [\pi, 2\pi] \text{ sådan att } \cos\psi = x.$$

Eftersom $\psi = \pm\theta + n \cdot 2\pi$ så måste vi välja minustecknet och $n = 1$ för att hamna i intervallet $[\pi, 2\pi]$, dvs $\psi = 2\pi - \theta$ och därmed $f^{-1}(x) = 2\pi - \arccos x$.

---

2. (a) Skärningslinjen mellan de två planen ges av ett linjärt ekvationssystem vars utökade matris är

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Via radoperationer erhålls den reducerade trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Så $z = t$ är en fri variabel, $y = -1$ och $x + t = 1 \Rightarrow x = 1 - t$. Så lösningsmängden är en linje L som ges i parameterform av

$$L = \{(1, -1, 0) + t(-1, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Vi använder formeln för avståndet d (rita figur!)

$$d = |\vec{AB}||\cos\theta| = \frac{|\mathbf{n} \bullet \vec{AB}|}{|\mathbf{n}|}$$

där A är en godtycklig punkt i planet, B är den aktuella punkten utanför planet, $\mathbf{n}$ är en normalvektor till planet och θ är vinkeln mellan $\mathbf{n}$ och $\vec{AB}$. Med $A = (1, -1, 0)$ och $\mathbf{n} = (2, -1, 2)$ (ur planets ekvation) får vi $\vec{AB} = (4, 2, 6) - (1, -1, 0) = (3, 3, 6)$ och

$$d = \frac{|(2, -1, 2) \bullet (3, 3, 6)|}{|(2, -1, 2)|} = \frac{6 - 3 + 12}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 5$$

Om man vill kan man använda en mera tillrättalagd formel för avståndet mellan punkten (x_0, y_0, z_0) och planet $ax + by + cz = d$:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(4) - 1(2) + 2(6) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 5.$$

(c) Om man drar en normal till planet genom punkten $(4, 2, 6)$ så måste den skära planet i närmaste punkten. Normalen har parameterekvationen
$(x, y, z) = (4, 2, 6) + t\mathbf{n} = (4, 2, 6) + t(2, -1, 2) =$
$= (4 + 2t, 2 - t, 6 + 2t)$.
Lös ekvationssystemet av dessa ekvationer och planets ekvation, dvs sätt in dessa uttryck för $x,\ y,\ z$ i planets ekvation och lös ut parametern t:
$2(4 + 2t) - (2 - t) + 2(6 + 2t) = 3$
Vi finner $t = -\frac{5}{3}$ och därmed närmaste punkten $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3})$.

---

3. Funktionen $f(x) = (x-2)^2 e^{4-x} + 1$ är definierad för alla x med derivatan

$$f'(x) = 2(x-2)e^{4-x} + (x-2)^2 e^{4-x} \cdot (-1) = e^{4-x}(x-2)(2-(x-2)) = e^{4-x}(x-2)(4-x)$$

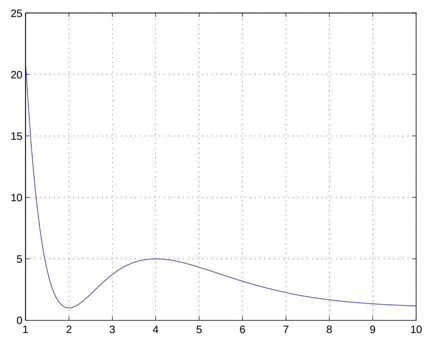
Vi beräknar också andraderivatan, förenklar och faktoruppdelar polynomet enligt faktorsatsen och får:

$$f''(x) = (x^2 - 8x + 14)e^{4-x} = (x - (4-\sqrt{2}))(x - (4+\sqrt{2}))e^{4-x}$$

Vi gör en teckentabell för både första- och andraderivatan för att få en överblick:

x	$-\infty$		2		$4-\sqrt{2}$		4		$4+\sqrt{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$		$\nearrow$	5	$\searrow$		$\searrow$	1

Ur tabellen utläser vi av derivatans teckenväxlingar att f har ett lokalt minimum i $x = 2$ och ett lokalt maximum i $x = 4$.
Andraderivatans tecken ger att grafen är konvex (concave up) i intervallet $(-\infty, 4-\sqrt{2})$ och i $(4+\sqrt{2}, \infty)$ samt konkav (concave down) i $(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$.



Vidare, eftersom

$$f(x) = (x-2)^2 e^{4-x} + 1 = \frac{(x-2)^2}{e^{x-4}} + 1$$

så ser vi att $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$ (exp-funktionen växer snabbast). Därmed är $y = 1$ en asymptot till grafen.
Men åt andra hållet har vi dels att $f(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$, dels:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(x-2)^2}{x} e^{4-x} + \frac{1}{x} \to -\infty \text{ då } x \to -\infty$$

eftersom den rationella funktionen och exponentialfunktionen i första termen går mot $-\infty$ respektive ∞. Därmed ingen asymptot åt det hållet, och ingen lodrät asymptot.

Sammanfattningsvis:
Vågrät asymptot: $y = 1$, lokalt minimum: $x = 2$, lokalt maximum: $x = 4$. Konkav i intervallet $(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$, konvex i de återstående intervallen.

---

4. (ab) Först studerar vi vad som händer runt punkterna $x = \pm 1$ där uttrycket för f skiftar:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) = 3(-1)^2 + \ln(1) = 3,$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 4(-1) + \cos(-\pi) = -5,$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4(1) + \cos(\pi) = 3,$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1e^0 - 6 = -5.$$

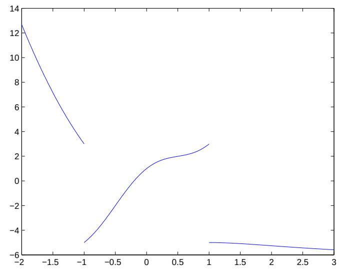
Vi kan derivera styckvis och konstatera att

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 1/x, & \text{då } x < -1, \\ 4 - \pi \sin(\pi x), & \text{då } -1 < x < 1, \\ (1-x)e^{1-x}, & \text{då } x > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Alltså är $f(x) < 0$ både när $x < -1$ och när $x > 1$, medan att $f(x) > 0$ när $-1 < x < 1$. Så nu vet vi följande om hur funktionen ser ut :

1. $f(x)$ är strängt avtagande då $x \in (-\infty, -1]$ från $+\infty$ till 3.
2. $f(x)$ är strängt växande då $x \in (-1, 1)$ från -5 till 3.
3. $f(x)$ är strängt avtagande då $x \in [1, \infty)$ från -5 till $-\infty$.

Inget av värdena -5 och 3 antas i det mellersta intervallet!



Av detta (se skissen!) ser vi att $f(x)$ aldrig antar samma värde för olika x-värden vilket ju innebär att f är injektiv och därmed inverterbar.

(c) Sambandet mellan derivatorna av f och f^{-1} är

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{där} \quad y = f(x)$$

Med givet y vet vi att det bara finns ett x som är lösning till $f(x) = y$. Vi ser också att funktionsvärdet $y = 1$ antas i det mellersta intervallet $(-1, 1)$, så vi söker lösningen till ekvationen $4x + \cos(\pi x) = 1$. Då upptäcker vi snart att denna enda lösning måste vara $x = 0$. Alltså är

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4 - \sin(\pi \cdot 0)} = \frac{1}{4}$$

---

5. Låt F vara skärningspunkten mellan linjerna genom AO och CD. Vi kan dela upp det L-formade området i två rektangler, $ABCF$ och $FDEO$. Vi kan anta att cirkeln har radie 1, för att underlätta beräkningarna. Då har vi att

$|AO| = |OE| = \cos v, \quad |DE| = |AB| = \sin v.$

Då är
Area$(ABCF) = |AB| \times |BC| = (\sin v)(\cos v - \sin v)$,
Area$(FDEO) = |DE| \times |OE| = (\sin v)(\cos v)$.

Kalla det L-formade områdets totala area för $f(v)$. Vi adderar areorna enligt ovan och får

$f(v) = 2\sin v \cos v - \sin^2 v = \sin 2v - \sin^2 v$, där $0 \le v \le \frac{\pi}{4}$.

Vi söker lokalt maximum för denna funktion. Derivering ger
$f'(v) = 2\cos 2v - 2\sin v \cos v = 2\cos 2v - \sin 2v$

I en extrempunkt är derivatan noll, så vi söker derivatans nollställen:
$0 = 2\cos 2v - \sin 2v \Rightarrow \tan 2v = 2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}\arctan 2$ ($\approx 31,72°$).

Derivatans teckenväxling är $+ \; 0 \; -$, så vi har ett lokalt och även absolut maximum vid denna vinkel. (Maximala arean efterfrågades ej, men den blir $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

Alltså: välj $v = \frac{1}{2}\arctan 2$.

---

6. (a) FALSKT. I polär form är

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Från De Moivres sats härleder vi att

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{93} = \cos\frac{93\pi}{4} + i\sin\frac{93\pi}{4}.$$

Men $93/4 = 11 \cdot 2 + 5/4$ så

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{93} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right).$$

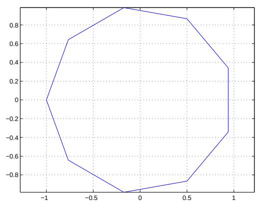
(b) SANT. Låt $z = \cos\theta + i\sin\theta$, så

$$z^9 = \cos 9\theta + i\sin 9\theta = -1 = \cos\pi + i\sin\pi,$$

som medför att

$$\theta = \frac{\pi}{9} + \left(\frac{2\pi}{9}\right)n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Den reella delen av z blir positiv om och endast om θ ligger i den första eller den fjärde kvadranten. Den ligger i den första kvadranten för $n = 0, 1$ och i den fjärde kvadranten för $n = 7, 8$.



Rötterna är hörnen i den avbildade niohörningen.

(c) FALSKT. Ty $\sin\theta \leq 1$ för alla $\theta \in \mathbb{R}$ så kan VL aldrig överstiga 6. Så ekvationen har faktiskt inga lösningar alls.

(d) FALSKT. T.ex. tag $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ och $a = 0$. Då gäller att $\lim_{x\to 0} |f(x)| = 1$. Men $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar ej, ty $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$ medan att $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

(e) SANT. Låt θ vara vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Då har vi att

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta, \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta. \end{aligned}$$

Därför är

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$$

(f) SANT. Vi tillämpar Rolle sats tre gånger. Eftersom f är deriverbar och $f(0) = f(1) = 0$ så måste det finnas $c_1 \in (0,1)$ sådan att $f'(c_1) = 0$. På samma sätt, eftersom $f(1) = f(2) = 0$ måste det finnas $c_2 \in (1,2)$ sådan att $f'(c_2) = 0$. Men f har andraderivata, dvs f' är också deriverbar. Eftersom $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ så måste det finnas $c \in (c_1, c_2)$ sådan att $f''(c) = 0$.
VSB.

---

7. (a) Definition 4, sid 99 i Adams.

(b) Sats 9, sid 121 i Adams. Man använder sats 8 inklusive exempel 1 i beviset, men dessa i sig behöver inte bevisas.
