

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor hösten 2010 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 24/8 eftermiddag.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/1011/

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) För vilka reella tal är $\sin\left(\frac{x-5}{3-x}\right) \geq 2$? (2p)

b) Låt $f(x) = 2x + 3e^x - 1$. Existerar derivatan $(f^{-1})'(2)$? Om den finns, beräkna den. (2p)

c) Bestäm för varje värde på konstanten a lösningarna till ekvationssystemet
$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$
 (2p)

d) Lös ekvationen $e^{2x} + e^x = 6$. (2p)

e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + (\ln x)^{10}}{x + e^{3x}} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + \sin x}{2x + \sin x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x^2 - x}$$

f) Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = \sin\left(\frac{\pi|x|}{2(x-1)}\right)$ ($x \neq 1$). (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Ett plan π innehåller de tre punkterna $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ och $(-1, -3, 1)$. (6p)
Bestäm en ekvation för π och ekvationer för de plan som är parallella med π och ligger på avståndet 6 längdenheter från π .

3. Skissera grafen till funktionen (6p)

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2}.$$

Ange eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. Konkavitet/konvexitet behöver ej utredas.

4. Bestäm minsta värdet (om det finns) och största värdet (om det finns) (5p)
av funktionen $f(x) = \begin{cases} 3 + \sin\left(\frac{3}{x+2}\right) & \text{då } x < -2 \\ \frac{x^2-3}{x+2} & \text{då } x > -2 \end{cases}$

Var god vänd!

5. Betrakta funktionsuttrycket (6p)

$$f(x) = \frac{1}{a \sin x \cos x - b \cos^2 x}$$

där a och b är positiva konstanter. Detta definierar en funktion på ett intervall $(T, \frac{\pi}{2})$. Bestäm talet T (så litet som möjligt) och beräkna därefter det minsta värdet av $f(x)$ i intervallet.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- a) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.
- b) Om f och g är deriverbara och om $h(x) = f(x)g(x)$, så är $h''(x) = f''(x)g(x) + f(x)g''(x)$.
- c) Om $0 < x < \frac{\pi}{2}$ så är $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} > 2$.
- d) För alla komplexa tal z gäller att $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$.
- e) Om $f'(x) > 0$ för varje reellt tal x , så gäller att $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$.
- f) Funktionen $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ är definierad för alla reella tal x .

7. a) Formulera medelvärdessatsen. (2p)
- b) Använd medelvärdessatsen för att bevisa att en funktion vars derivata är noll i ett intervall måste vara konstant i intervallet. (2p)
- c) Antag att f är en deriverbar funktion sådan att för alla reella tal x och y gäller att $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$, där M är en konstant. Bevisa att f är konstant. (3p)

Lycka till!
/Lennart