

1. Till denna uppgift skulle bara lämnas svar, men här ges lite mera.

a) För vilka reella tal är $\sin\left(\frac{x-5}{3-x}\right) \geq 2$?

Eftersom sinus aldrig kan bli större än 1, så är olikheten **inte sann för något reellt tal x** .

b) Låt $f(x) = 2x + 3e^x - 1$. Existerar derivatan $(f^{-1})'(2)$? Om den finns, beräkna den.

Vi deriverar: $f'(x) = 2 + 3e^x$. Denna derivata är positiv för alla x och därmed finns inversen och den är deriverbar med $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ där $y = f(x)$. Vi ser att $f(0) = 2$, alltså är $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$

c) Bestäm för varje värde på konstanten a lösningarna till ekvationssystemet $\begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

För $a = -2$ har systemet oändligt många lösningar (trappstegsmatrisens andra rad är en nollrad): $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

För alla andra värden på a får vi entydig lösning: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

d) Lös ekvationen $e^{2x} + e^x = 6$.

Sätt $t = e^x$, ekvationen blir $t^2 + t = 6$. Denna andragradsekvation har lösningarna $t = 2$, $t = -3$. Eftersom $e^x > 0$ ger bara den förra roten en lösning: $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$.

- e) Beräkna följande gränsvärden:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + (\ln x)^{10}}{x + e^{3x}} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + \sin x}{2x + \sin x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x^2 - x}$$

-
- $\alpha)$ Vi förkortar med det dominerande uttrycket e^{3x} :

$$\frac{x^5 + (\ln x)^{10}}{x + e^{3x}} = \frac{\frac{x^5}{e^{3x}} + \frac{(\ln x)^{10}}{e^{3x}}}{\frac{x}{e^{3x}} + 1} \rightarrow \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0 \text{ då } x \rightarrow \infty$$

enligt kända gränsvärdeslagar för exponential- polynom- och logaritmfunktioner.

- $\beta)$ Här förkortar vi med noll och använder det kända gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\frac{4x + \sin x}{2x + \sin x} = \frac{4 + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}} \rightarrow \frac{4 + 1}{2 + 1} = \frac{5}{3} \text{ då } x \rightarrow 0.$$

- $\gamma)$ Vi använder samma gränsvärde som i föregående gränsvärde:

$$\frac{\tan 2x}{x^2 - x} = \frac{\sin 2x}{x(x-1) \cos 2x} = \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{(x-1) \cos 2x} \rightarrow 1 \cdot \frac{2}{(-1) \cdot 1} = -2$$

då $x \rightarrow 0$.

- f) Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = \sin\left(\frac{\pi|x|}{2(x-1)}\right)$ ($x \neq 1$). (3p)

Uttrycket saknar gränsvärde då $x \rightarrow 1$ (vinkeln går mot ∞ från höger och mot $-\infty$ från vänster, i båda fallen saknar sinus gränsvärde). Däremot går vinkeln mot $\frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow \infty$ respektive mot $-\frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow -\infty$, vilket gör att sinusuttrycket går mot 1 respektive -1. Slutsats: Det finns två vågräta asymptoter: $y = -1$ ($x \rightarrow -\infty$) och $y = 1$ ($x \rightarrow \infty$).

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Ett plan π innehåller de tre punkterna $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ och $(-1, -3, 1)$. Bestäm en ekvation för π och ekvationer för de plan som är parallella med π och ligger på avståndet 6 längdenheter från π .

För att bestämma en normalvektor till alla planen, bilda två vektorer parallella med planen med hjälp av de givna punkterna:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 0) - (1, 1, 1) = (1, 0, -1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, 0) - (-1, -3, 1) = (3, 4, -1)$$

Vektorprodukten (kryssprodukten) av dessa vektorer är en normalvektor till alla planen:

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, 0, -1) \times (3, 4, -1) = (4, -2, 4)$. Vi tar halva denna som normalvektor: $\mathbf{n} = (2, -1, 2)$ och vet då att alla de tre planen har en ekvation av typen $2x - y + 2z = D$. För att bestämma D behöver vi en punkt i varje plan. I det första planet kan vi välja en av tre givna, t ex $P_1 = (2, 1, 0)$, för de andra tar vi ett steg av rätt längd i normalens riktning. Normalvektorn $\mathbf{n}$ har längden $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$, så $2\mathbf{n}$ har just längden 6. Vi väljer de nya punkterna som $P_2 = (2, 1, 0) + 2\mathbf{n} = (6, -1, 4)$ respektive $P_3 = (2, 1, 0) - 2\mathbf{n} = (-2, 3, -4)$. Genom att i tur och ordning sätta in P_1 , P_2 , P_3 i $2x - y + 2z = D$, så kan vi bestämma respektive D -värde. Vi får planen

$$2x - y + 2z = 3, \quad 2x - y + 2z = 21, \quad 2x - y + 2z = -15.$$

3. Skissera grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2}$. Ange eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. Konkavitet/konvexitet behöver ej utredas.

Först konstaterar vi att $f(x) \rightarrow -\infty$ och $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow 2^-$ respektive $x \rightarrow 2^+$. Detta innebär att grafen har en lodrät asymptot $x = 2$, men ingen annan sådan eftersom $f(x)$ är definierat för alla $x \neq 2$.

Då $|f(x)| \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$, kan det bara finnas sneda asymptoter i $\pm\infty$. För att finna eventuella sådana beräknar vi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1$$

som är möjlig riktningskoefficient k för en asymptot. För den skull beräknar vi

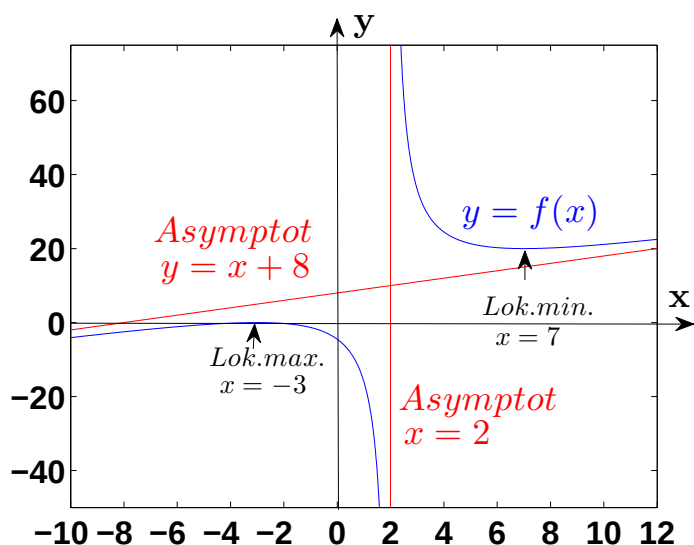
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x + 9}{x - 2} = 8,$$

vilket innebär att $y = x + 8$ är asymptot i $\pm\infty$. Därmed är asymptotutredningen klar. Vi deriverar nu $f(x)$ efter en praktisk omskrivning:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{(x+3)^2}{x-2} = \frac{2(x+3)(x-2) - (x+3)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x+3)(2(x-2) - (x+3))}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{(x+3)(x-7)}{(x-2)^2}, \text{ så derivatans nollställen är } x = -3 \text{ och } x = 7. \text{ Vi samlar nu alla} \\ &\text{viktiga fakta i en tabell till stöd för grafitningen.} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-3		2		7		∞
$f'(x)$		+	0	-	odef	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	odef	$\searrow$	20	$\nearrow$	∞

Vi ritar grafen:



4. Bestäm minsta värdet (om det finns) och största värdet (om det finns) av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \sin\left(\frac{3}{x+2}\right) & \text{då } x < -2 \\ \frac{x^2-3}{x+2} & \text{då } x > -2 \end{cases}$$

Först konstaterar vi att funktionen varierar mellan $3 - 1 = 2$ och $3 + 1 = 4$ för $x < -2$, eftersom sinusfunktionen varierar mellan -1 och 1 . Återstår att utreda $x > -2$. Man kan se att $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow -2^+$ och att $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow +\infty$. Något största värde finns alltså inte. Vad händer mellan $x = -2$ och ∞ ? Vi deriverar:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

så vi ser att derivatan har ett nollställe i intervallet, $x = -1$, med teckenväxlingen $-0+$, alltså ett minimum. Eftersom $f(-1) = -2$, så visar en jämförelse med intervallet $x < -2$ som vi började med, att detta är funktionens absoluta minimum.

Inget största värde, minsta värde -2.

Uppgift 5 på nästa sida!

5. Betrakta funktionsuttrycket

$$f(x) = \frac{1}{a \sin x \cos x - b \cos^2 x}$$

där a och b är positiva konstanter. Detta definierar en funktion på ett intervall $(T, \frac{\pi}{2})$. Bestäm talet T (så litet som möjligt) och beräkna därefter det minsta värdet av $f(x)$ i intervallet.

Vi skriver funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\cos x(a \sin x - b \cos x)}$$

och konstaterar att uttrycket inom parentes i nämnaren går mot $a > 0$ då $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Om vi låter x avta från $\frac{\pi}{2}$, så avtar sinustermen och växer cosinustermen och det måste finnas en punkt $x = T$ där parentesen blir noll. Detta T begränsar det intervall där f kan definieras. Vi löser ut T :

$$a \sin T - b \cos T = 0 \iff \tan T = \frac{b}{a}$$

I det aktuella området blir lösningen till denna ekvation $\mathbf{T} = \arctan \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$.

Nu återstår att minimera $f(x)$, dvs att maximera $g(x) = a \sin x \cos x - b \cos^2 x$ över intervallet $(\arctan \frac{b}{a}, \frac{\pi}{2})$. Eftersom $g(x)$ är noll i $x = T$ och i $x = \frac{\pi}{2}$ och $g(x) > 0$ i $(T, \frac{\pi}{2})$ samt är en deriverbar (därmed kontinuerlig) funktion, så måste $g(x)$ ha ett största värde i intervallet, och dess derivata måste vara noll där.

$$g'(x) = -a \cos^2 x + a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x = a \cos 2x + b \sin 2x$$

$$g'(x) = 0 \iff \tan 2x = -\frac{a}{b}$$

Enda möjliga lösning i vårt intervall måste vara $x_0 = \frac{1}{2} \arctan(-\frac{a}{b}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{b}$.

Man kan också skriva om x_0 lite för att se relationen till T :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{b} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{b}{a}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \frac{b}{a} = \frac{\pi}{4} + \frac{T}{2}$$

Alltså är x_0 mittpunkten i vårt intervall: $x_0 = \frac{T + \frac{\pi}{2}}{2}$.

Största värdet av $g(x)$? Vi gör en omskrivning av $g(x)$ med dubbla vinkeln:

$$g(x_0) = \frac{1}{2} (a \sin 2x_0 - b(1 + \cos 2x_0)) = \frac{1}{2} (a \sin(\pi - \arctan \frac{a}{b}) - b(1 + \cos(\pi - \arctan \frac{a}{b}))) = \frac{1}{2} (a \sin(\arctan \frac{a}{b}) - b + \cos(\arctan \frac{a}{b}))$$

Om vi ritar en hjälptriangel med kateterna a och b samt hypotenusan $\sqrt{a^2 + b^2}$ kan vi lätt hitta de sinus- och cosinusvärden som behövs här (det handlar ju om spetsiga vinklar här!). Vi ser då att

$$\sin(\arctan \frac{a}{b}) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos(\arctan \frac{a}{b}) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Detta ger } g(x_0) = \frac{1}{2} (\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - b + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}) = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - b)$$

och minsta värdet av vår ursprungliga funktion är $f(x_0) = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} - \mathbf{b}}$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

a) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.

Sant. Kryssprodukten är ju ortogonal mot de ingående vektorerna.

b) Om f och g är deriverbara och om $h(x) = f(x)g(x)$, så är $h''(x) = f''(x)g(x) + f(x)g''(x)$.

Falskt. Testa med valda funktioner!

c) Om $0 < x < \frac{\pi}{2}$ så är $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} > 2$.

Sant. I intervallet är ju $0 < \sin x < 1$ och $0 < \cos x < 1$, så $\frac{1}{\sin x} > 1$ och $\frac{1}{\cos x} > 1$.

d) För alla komplexa tal z gäller att $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$.

Falskt. Testa med $z = i$!

e) Om $f'(x) > 0$ för varje reellt tal x , så gäller att $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$.

Falskt. Exemplet $f(x) = \arctan x$ visar att en sådan funktion kan vara begränsad.

f) Funktionen $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ är definierad för alla reella tal x .

Sant. Eftersom $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$, så är $\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1$, och tillhör därmed definitionsmängden för $\arcsin$.

7. a) Formulera medelvärdessatsen.

Se läroboken!

b) Använd medelvärdessatsen för att bevisa att en funktion vars derivata är noll i ett intervall måste vara konstant i intervallet.

Se läroboken!

c) Antag att f är en deriverbar funktion sådan att för alla reella tal x och y gäller att $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$, där M är en konstant. Bevisa att f är konstant.

Av ovanstående, med $x + h$ istället för y , följer att $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq M|h|$
Av instängningsregeln följer att gränsvärdet $f'(x)$ (då $h \rightarrow 0$) måste vara noll för alla x , och då vet vi enligt (b) ovan att funktionen är konstant.