

1. Till denna uppgift ska du **ENDAST LÄMNA IN SVAR**, alltså utan motiveringar.
Här ges dock korta lösningar.

a) Ange alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 5 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

Systemet överförs genom elementära radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Detta ger lösningarna (oändligt många):

Svar:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

- b) För vilka reella tal x är olikheten $|5 - x^2| < 4$ sann?
-

Avståndet på tallinjen mellan x^2 och 5 ska vara mindre än 4. Det ger $1 < x^2 < 9$, vilket motsvarar

Svar: $-3 < x < -1, 1 < x < 3$

- c) Funktionen $f(x) = e^x + \ln x$ ($x > 0$) är inverterbar. Beräkna $(f^{-1})'(e)$.
-

Vi observerar att $f(1) = e$, $f'(1) = e + 1$. För derivatan gäller nu: $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)}$.

Svar: $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{e+1}$

-
- d) Luft pumpas in i en sfärisk ballong med hastigheten $3 \text{ m}^3/\text{s}$.
Hur snabbt växer ballongens diameter i det ögonblick då diametern är en meter.
-

Med r = radien, D = diametern, V = volymen gäller $V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi D^3}{6}$. Dessa variabler är här funktioner av tiden t , och vi kan derivera sambandet med avseende på t (kedjeregeln):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{2} D^2 \frac{dD}{dt}. \text{ Känt: } \frac{dV}{dt} = 3, D = 1, \text{ sätt in och lös ut } \frac{dD}{dt} = \frac{6}{\pi}.$$

Svar: Diametern växer med $\frac{6}{\pi} \text{ m/s}$.

- e) Ange följande gränsvärden:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^3 + 1)}$

i) $\frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} (x + 1) \rightarrow 1 \cdot 2 = 2$ då $x \rightarrow 1$.

ii) $\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^3 + 1)} = \frac{\ln x^2 (1 + x^{-2})}{\ln x^3 (1 + x^{-3})} = \frac{2 \ln x + \ln(1 + x^{-2})}{3 \ln x + \ln(1 + x^{-3})} = \frac{2 + \frac{\ln(1+x^{-2})}{\ln x}}{3 + \frac{\ln(1+x^{-3})}{\ln x}} \rightarrow \frac{2}{3}$ då $x \rightarrow \infty$.

iii) $\frac{e^{2x} - e^x}{x} = e^x \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow e^0 \cdot 1 = 1$ då $x \rightarrow 0$.

Svar: a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) 1

- f) Ange alla komplexa tal z sådan att $\text{Im}(z) > 0$ och $z^6 = -1$.
-

Med $z = re^{i\theta}$ får vi ekvationen i polär form: $r^6 e^{i6\theta} = 1 \cdot e^{i\pi}$. Vi får $r = 1$, $6\theta = \pi + 2k\pi$, och lösningarna blir $z = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. De lösningar som har $\text{Im}(z) > 0$ svarar mot $k = 0, 1, 2$. Med $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ får vi:

Svar: $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, i , $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 3)$ och $C = (-1, 0, 3)$.

- a) Beräkna arean av triangeln med hörn i A, B och C .
- b) Beräkna avståndet från C till linjen genom A och B .
- c) Beräkna avståndet från punkten $D = (3, 3, 3)$ till triangelns plan.
- d) Ange ekvationen för linjen genom A och B i parameterform.

a) Arean är $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}|(1, 2, 2) \times (-2, -1, 2)| = \frac{1}{2} |(6, -6, 3)| = \frac{3}{2} |(2, -2, 1)| = 4,5$

b) Avståndet är längden av ortogonalprojektion av $\vec{AC}$ på sidan AB , dvs $\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|} = 3$

c) Avståndet är längden av ortogonalprojektion av $\vec{AD}$ på triangelplanets normal
$$= \frac{|\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \frac{2}{3}$$

d) Med punkten $A = (1, 1, 1)$ och riktningsvektorn $\mathbf{v} = \vec{AB}$ är linjens ekvation i parameterform: $\mathbf{r} = \vec{OA} + t\mathbf{v}$, vilket skrivs ut i svaret nedan.

Svar: a) 4,5 b) 3 c) $\frac{2}{3}$ d) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 2, 2)$

3. Bestäm definitions- och värdemängden för funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Funktionen f är definierad då $\ln x$ är det, dvs i $(0, \infty)$. Vi deriverar:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ med enda nollställe } x = e.$$

Vi observerar också att $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^+$, samt att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ (enligt gränsvärdeslag). Vi gör en teckentabell för derivatan (gränsvärden inom parentes):

x	0	<	e	<	∞
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$(-\infty)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	(0)

Av denna undersökning framgår att f antar alla värden i intervallet $(-\infty, \frac{1}{e}]$.

Svar: Definitionsmängden är $(0, \infty)$ och värdemängden är $(-\infty, \frac{1}{e}]$.

-
4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 7x + 6}$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)
-

Vi konstaterar först att $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 7x + 6} = 1$, vilket innebär att $y = 1$ är vågrät asymptot i $-\infty$ och $+\infty$. Nämnarens nollställen är $x = -6$, $x = -1$, så f är definierad i $(-\infty, -6) \cup (-6, -1) \cup (-1, \infty)$. Vidare gäller att $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow -6^-$ och $x \rightarrow -1^+$, $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -6^+$ och $x \rightarrow -1^-$. Linjerna $x = -6$ och $x = -1$ är lodräta asymptoter.

Vi undersöker derivatan: $f'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 + 7x + 6) - (x^2 - 2x)(2x + 7)}{(x^2 + 7x + 6)^2}$

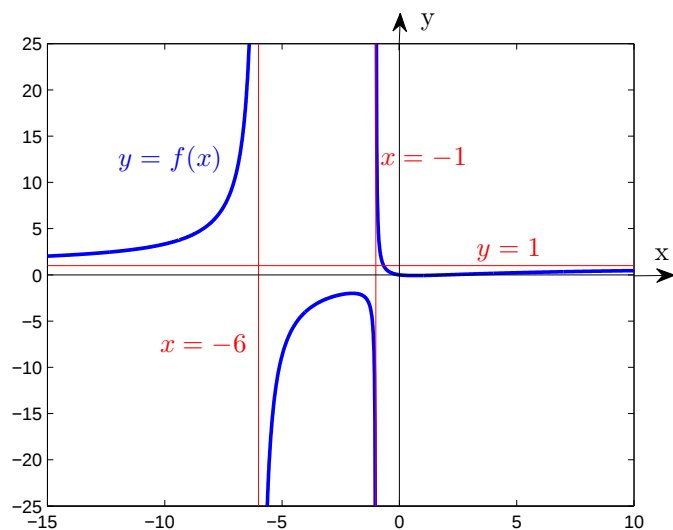
och efter förenkling och faktoruppdelning: $f'(x) = \frac{9(x + 2)(x - \frac{2}{3})}{(x + 6)^2(x + 1)^2}$.

Nollställen: $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$

Vi gör en teckentabell för god översikt:

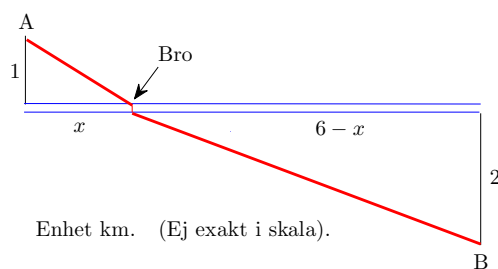
x	$-\infty$	$<$	-6	$<$	-2	$<$	-1	$<$	$\frac{2}{3}$	$<$	$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$	(1)	$\nearrow$	ej def	$\nearrow$	-2	$\searrow$	ej def	$\searrow$	-0,08	$\nearrow$	(1)

Vi ser att f har ett lokalt maximum i $x = -2$ och ett lokalt minimum i $x = \frac{2}{3}$.



Svar: Asymptoter: $x = -6$, $x = -1$, $y = 1$,
lokalt maximum i $x = -2$, lokalt minimum i $x = \frac{2}{3}$.

-
5. 1 km från en plats A går en flod med parallella stränder och bredden 100 m. 6 km längre ned längs floden ligger en annan plats B , fast på andra sidan och 2 km från floden. Nu vill man bygga en bro över floden så att färdsträckan mellan A och B via bron minimeras. Man antas röra sig rätlinjigt till och från bron. Var ska bron byggas?
-



Antag att bron byggs x km nedströms från den punkt på stranden som ligger närmast A . Då är det $6 - x$ km kvar till motsvarande punkt närmast B . Totala sträckan blir då (via Pythagoras sats):

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{10} + \sqrt{(6 - x)^2 + 4}, \quad 0 \leq x \leq 6$$

Derivera!

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{-(6 - x)}{\sqrt{(6 - x)^2 + 4}}$$

$$f'(x) = 0 \iff x\sqrt{(6 - x)^2 + 4} = (6 - x)\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x^2((6 - x)^2 + 4) = (6 - x)^2(x^2 + 1)$$

$$\iff 3x^2 + 12x - 36 = 0 \text{ med rötterna } x = -6, x = 2.$$

Studerar vi tecknen i vänster- och högerled före kvadrering, ser vi att den första är en falsk rot på grund av kvadrering, den andra är sann. Eftersom $f'(0) < 0$, $f'(6) > 0$ måste den kontinuerliga funktionen f' ha teckenvariationen $- 0 +$, dvs $x = 2$ ger lokalt minimum, tillika minsta värde.

Det finns också en "finurlig" lösning:

Flodens bredd påverkar inte resultatet, den ger ju en konstant term i $f(x)$. I så fall kan vi ersätta floden med en som har bredd noll. Kortaste vägen blir då en rät linje mellan A och B , varmed lösningen lätt hittas med likformighet. Floden kan skjutas in igen för korrekt tolkning.

Svar: Bron ska byggas 2 km nedströms från den punkt på stranden som ligger närmast A .

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

a) Ekvationen $x^3 + 2008x^2 + 2008x + 2008 = 0$ saknar reella lösningar.

Svar: Falskt. (Udda gradtal innebär att polynomet antar alla reella värden).

b) För alla komplexa, icke-reella tal z gäller att $\operatorname{Re}(z) < |z|$.

Svar: Sant. (Om z inte ligger på realaxeln, så är avståndet $|z|$ till 0 strängt större än avståndet $|\operatorname{Re} z|$ till imaginäraxeln, vilket i sin tur är $\geq \operatorname{Re} z$.)

c) För alla θ sådan att $0 < \theta < \pi/4$ så gäller att $\sin \theta < \sin 3\theta$.

Svar: Sant. (Man kan inse att påståendet är sant genom att rita $y = \sin \theta$ och $y = \sin 3\theta$ i samma figur. Annars är $\sin 3\theta - \sin \theta = 2 \sin \theta \cos 2\theta$, här är faktorerna positiva i $(0, \frac{\pi}{4})$.)

d) Om $f(x)$ är deriverbar för alla x i intervallet $(-1, 1)$ så existerar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Svar: Sant. (f deriverbar i 0 medför att f är kontinuerlig i 0, dvs $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.)

e) Om f är deriverbar, $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ så måste $f'(\frac{1}{2}) > 0$.

Svar: Falskt. (Ex: $f(x) = 8(x - \frac{1}{2})^3 - x + 1$. Här är $f'(\frac{1}{2}) = -1$. Kan dock inses utan specifikt exempel genom kurvritning.)

f) Om $y = f(x)$ är en injektiv (ett-till-ett) funktion och $y = g(x)$ dess invers, så gäller att $(f \circ g \circ f)(x) = f(x)$.

Svar: Sant. ($f \circ (g \circ f) = f \circ (f^{-1} \circ f) = f \circ id = f$.)

-
7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x .
- b) Formulera och bevisa *produktregeln*, dvs räknelagen för derivering av en produkt av två funktioner.
-

Se Adams sid 98 respektive 108-109!
