

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från hösten 2011 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 24/10.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida

[www.math.chalmers.se/Math/Grundtb/CTH/tmv125/1112/](http://www.math.chalmers.se/Math/Grundtb/CTH/tmv125/1112/)

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) För vilka reella tal  $x$  är  $|x - 1| > |x + 3|$ ? (2p)

b) För vilket eller vilka värden på  $a \in \mathbb{R}$  saknar ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + az = 6 \end{cases}$$

lösning?

c) Låt  $f(x) = \tan x$ , definierad för  $x \in [0, \pi]$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .  
Existerar  $f^{-1}(1)$  och vad är i så fall detta värde? (2p)

d) För vilka reella tal  $x$  gäller  $\sin\left|\frac{x+5}{3-x}\right| \geq 2 \cos \frac{\pi}{4}$ ? (2p)

e) Derivera  $f(x) = e^{\sin^2 x}$ . (2p)

f) Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i så fall: (4p)

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ , ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sin x}{x - 2 \ln |x|}$ , iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(3+x)}$ .

**Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.**

2. a) Bestäm en ekvation för det plan  $\Pi$  som är ortogonalt mot planet  $x + y - z = 2$  och innehåller linjen genom punkterna  $(1, 0, -1)$  och  $(0, 1, 1)$ . (3p)

b) Bestäm på parameterform, linjen  $\ell$  som går genom punkten  $(1, 2, 1)$  och som är ortogonal mot  $x + y - z = 2$ . (2p)

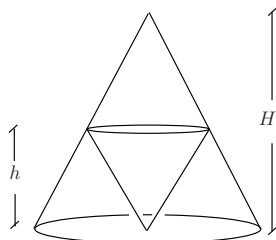
c) Skär linjen  $\ell$  planet  $\Pi$  och i så fall var? (1p)

3. Bestäm värdemängden för funktionen  $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \arctan x$ . (6p)

**Var god vänd!**

4. Rita grafen till funktionen  $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$ . Ange speciellt funktionens definitionsmängd och värdemängd, eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

5. En rät cirkulär kon (alltså en 'vanlig kon') med höjden  $h$  är inskriven i en större cirkulär kon med höjden  $H$  så att spetsen på de lilla konen vilar mot centrum av basen på den stora. Visa att den lilla konens volym blir maximal då  $h = \frac{H}{3}$ . (6p)



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- a) Om  $z$  är ett komplext tal sådant att  $|z - 1 - i| < \sqrt{2}$ , så är  $|z| < 2\sqrt{2}$ .
- b) Det är möjligt att finna en funktion som är deriverbar i  $x = 2$  men inte kontinuerlig i denna punkt.
- c)  $\arccos(\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) = 0$ .
- d) För alla  $x > 0$  gäller  $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ .
- e) Funktionen  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x-2)^9}$  har ett nollställe i intervallet  $(1, 2)$ .
- f) Låt  $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin \frac{1}{x} & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & \text{då } x = 0 \end{cases}$ . Då gäller att  $f'(0) = 0$ .

7. Visa att om  $f'(x) > 0$  i ett intervall  $I$ , så är  $f$  strängt växande (terminologi enligt Adams: increasing) i  $I$ . Formulera också den sats som används i detta bevis. (6p)