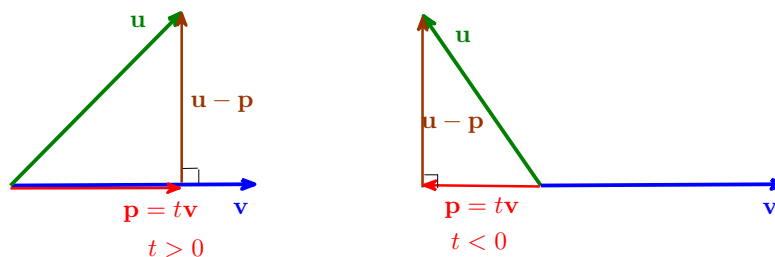


Några moment ur Adams kapitel 10.

Ortogonalprojektion med skalärprodukt

Kan ses som en alternativ framställning av avsnittet mellan ex 4 och ex 5 sid 575 (med definition 4)

Vi vill projicera en vektor $\mathbf{u}$ ortogonalt (=vinkelrätt) på en riktning som definieras av en vektor $\mathbf{v}$. Vad som menas med detta illustreras av figurerna nedan. Den projicerade vektorn $\mathbf{p}$ kan då uttryckas som en skalär t gånger $\mathbf{v}$. Om inte $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$ (och därmed $\mathbf{p} = \mathbf{0}$) finns det två möjligheter: $\mathbf{p}$ har samma riktning som $\mathbf{v}$ ($t > 0$) eller motsatt riktning ($t < 0$) vilket illustreras i figurerna nedan. Där har också markerats vektorn $\mathbf{u} - \mathbf{p}$ som är den andra vektorn vid en uppdelning av $\mathbf{u}$ i två vinkelräta komponenter.



För att bestämma talet t utnyttjar vi att skalärprodukten av två vinkelräta vektorer är noll:

$$(\mathbf{u} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{v} = 0 \iff (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) \bullet \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} - t\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = 0$$

Vi får därmed $t = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}$ och kan uttrycka den projicerade vektorn:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

Vi observerar också att längden av $\mathbf{p}$ är

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} |\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|^2} |\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Tar vi bort absolutbeloppet i täljaren får vi ett tal vars tecken anger projektionens riktning i förhållande till $\mathbf{v}$ och vars belopp är projektionens längd. Detta tal $s = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ kallas *skalära projektionen* av $\mathbf{u}$ på riktningen av $\mathbf{v}$.

Exempel:

Om $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ska projiceras på riktningen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$, så är $\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \frac{-5}{49}$ och då blir

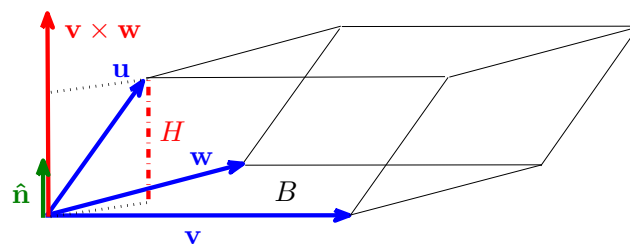
$$\mathbf{p} = -\frac{5}{49} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{49} \\ \frac{15}{49} \\ \frac{30}{49} \end{bmatrix}$$

och den skalära projektionen blir talet $s = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\frac{5}{7}$.

Varför är volymen av en låda en determinant?

Kan läsas direkt efter ex 3 i avsnittet "The cross product as a determinant" (sid 582).

Vi har tre vektorer i rummet, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, och vi vill beräkna volymen av den låda de spänner upp. (Strunta i den gröna vektorn i figuren, den används inte i denna framställning.)



Först konstaterar vi att volymen av lådan är produkten av basarean B och höjden H , därefter gör vi följande beräkningar av dessa:

- Basarean har samma måttetal som längden av kryssprodukten av de vektorer som spänner upp den (se Adams sid 578, efter definition 5), dvs $B = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$
- Höjden är längden av projektionen av vektorn $\mathbf{u}$ på vektorn $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, dvs (se avsnittet om ortogonalprojektion) $H = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}$

Nu blir volymen $B \cdot H = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$, absolutbeloppet av den s k *skalära trippelprodukten*. Att denna i sin tur kan skrivas som en determinant ser man så här:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & \mathbf{i} \\ v_2 & w_2 & \mathbf{j} \\ v_3 & w_3 & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \\ &= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Det spelar ingen roll i vilken ordning de tre vektorerna skrivs - vi kan ju cirkulera namnen mellan dem hur som helst och se att härledningen fungerar! Vi får volymen $= |\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})| = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$, även ordningen mellan de två sista kan kastas om. Själva trippelprodukten kan dock skifta tecken, men det ingår ju att ta absolutbeloppet av den.

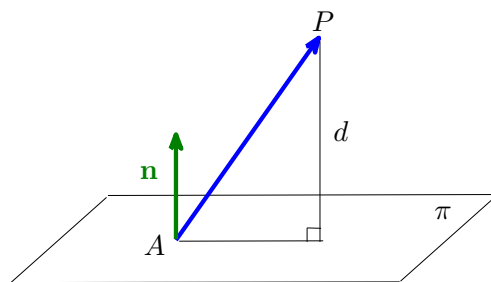
Några avståndsberäkningar

Detta kan ses som en alternativ framställning av Adams 10.4, "Distances", sid 590-591.

Avståndet från en punkt till ett plan.

Vi vill veta avståndet d från en punkt P till ett plan π . Vi förutsätter att punkten inte ligger i planet, vilket ju skulle vara alldeles för lätt. Vi skaffar oss två saker:

- en punkt A i planet. Det är bara att fritt välja koordinater som löser planets ekvation.
- en normalvektor $\mathbf{n}$. Om vi har planets ekvation, kan vi avläsa en sådan vektor ur koefficienterna för x , y och z .



Nu blir avståndet helt enkelt absolutbeloppet av skalära projektionen av vektorn $\overrightarrow{AP}$ på riktningen som ges av $\hat{\mathbf{n}}$, dvs

$$d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP}|}{|\mathbf{n}|}$$

Ur detta kan man lätt få den snygga formeln i Adams ex 7, men den har sina risker. Vid memorering finns alltid risken att missta sig på D eftersom planets ekvation ibland skrivs $Ax + By + Cz = D$, ibland $Ax + By + Cz + D = 0$. Det blir då lätt ett teckenfel i formeln, och det hjälper inte att man ska ta absolutbelopp.

Vi tar ett exempel: hur långt är det från punkten $P = (1, 2, 3)$ till planet $2x - 3y + 6z = 5$?

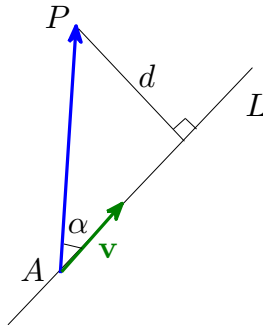
Vi tar en punkt i planet: $A = (1, -1, 0)$ och en normalvektor $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$. Då är $\overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$,

så vi får $d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 + 6 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{9}{7}$.

Avståndet från en punkt till ett linje.

Nu vill vi veta avståndet från en punkt P till en rät linje L . Vi antar att punkten inte ligger på linjen (allt fungerar då också, men det blir ett överdrivet arbete). Denna gång plockar vi fram

- en punkt A på linjen.
- en riktningsvektor $\mathbf{v}$.



I det här fallet drar vi nytta av kryssprodukten. Eftersom $d = |\overrightarrow{AP}| \sin \alpha$ (även då vinkeln α är trubbig: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$) och $|\mathbf{v} \times \overrightarrow{AP}| = |\mathbf{v}| |\overrightarrow{AP}| \sin \alpha = |\mathbf{v}| d$, så är helt enkelt

$$d = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\mathbf{v}|}$$

Observera att beloppstecknen här betecknar *längden av en vektor*, inte absolutbeloppet av ett tal!

Även här tar vi ett litet exempel: hur långt är det från punkten $P = (1, 2, 3)$ till räta linjen $L: (x, y, z) = (4, -1, 1) + t(-1, 2, 1)$?

En punkt på L är uppenbarligen $A = (4, -1, 1)$, vilket ger $\overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ och en riktningsvektor

är $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi beräknar kryssprodukten:

$$\mathbf{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & \mathbf{i} \\ 2 & 3 & \mathbf{j} \\ 1 & 2 & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och slutligen

$$d = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$$

Avståndet mellan två plan.

De två planen förutsätts vara parallella och åtskilda, annars är ju avståndet noll! Här behövs egentligen inga nya metoder: **välj bara en punkt ur det ena planet och beräkna dess avstånd till det andra planet.**

Annars kan man också härleda en formel som jag här återger mest för att avvärja ett vanligt missförstånd. Avståndet mellan planen $Ax + By + Cz = D_1$ och $Ax + By + Cz = D_2$ är

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

och alltså inte bara differensen mellan högerleden!

Avståndet mellan två linjer.

För detta ger Adams en något svårmemorerad formel (sid 591 längst ner), och den är inte så intressant att belasta sitt minne med. Hellre då en bra idé, som t ex följande:

Om två rätta linjer inte skär varandra (det gör de oftast inte i $\mathbb{R}^3$) så finns det ett plan som innehåller den ena linjen och är parallellt med den andra (tänk på en planskild vägkorsning: markplanet innehåller den ena vägen och är parallellt med vägbron). Använd riktningsvektorer för vardera linjen för att med kryssprodukt generera en normalvektor för planet. Ta sedan en punkt på den linje som inte ligger i planet och beräkna dess avstånd till planet (alla punkter på vägbron har ju samma avstånd till markplanet).