

1. Till denna uppgift skulle bara ges svar, men här ges dock korta lösningar.

a) För vilka reella tal är $\frac{x^3 - 3x^2}{x - 2} < 0$?

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x - 3)}{x - 2} < 0 \iff \frac{x - 3}{x - 2} < 0$$

Uttrycket är negativt exakt då täljare och nämnare har olika tecken. Därav:

Svar: $2 < x < 3$

b) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \end{cases}$$

Vi överför den utvidgade koefficientmatrisen för systemet till trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

och konstaterar att vi får ett pivotelement i högerledet. Därav följer:

Svar: Lösning saknas.

c) Bestäm **en** (vilken som helst) av lösningarna till ekvationen $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$. (Du får ge svaret i polär form.)

$$z^4 - 2z^2 + 2 = 0 \iff (z^2 - 1)^2 = -1 \iff z^2 = 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

Av detta kan vi se att två av lösningarna är $z = \sqrt[4]{2}e^{\pm i\frac{\pi}{8}}$

Svar: $z = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ (t. ex.)

d) Funktionen $f(x) = e^{x^2}$ är inverterbar då $x \in (0, \infty)$. Bestäm $(f^{-1})'(e^4)$

Inverterbarheten följer av att f är strängt växande i $(0, \infty)$. Då gäller följande samband mellan derivatorna av f och f^{-1} :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ och eftersom } f'(x) = 2xe^{x^2} \text{ och } x = 2 \text{ motsvarar } y = e^4, \text{ är alltså}$$
$$(f^{-1})'(e^4) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4e^4}$$

Svar: $(f^{-1})'(e^4) = \frac{1}{4e^4}$

e) Beräkna följande gränsvärden:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{e^{2x} - 1}$

Antingen använder man grundläggande gränsvärden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \frac{\ln(1+3x)}{3x}}{2x \frac{e^{2x}-1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\ln(1+3x)}{3x}}{2 \frac{e^{2x}-1}{2x}} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1}.$$

Eller så tar man l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{2e^{2x}} = \frac{3}{2}$$

(gränsvärdet av kvoten är lika med gränsvärdet av kvoten mellan täljarens och nämnarens derivator, vilket gäller då ursprungliga täljaren och nämnaren båda går mot noll).

Svar: $\frac{3}{2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Svar: -1

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-(\ln x)^2} = 0$$

Svar: 0

- f) En partikel rör sig moturs längs enhetscirkeln (längdenhet meter) med den konstanta farten 2m/s. Hur snabbt ökar partikelns avstånd från punkten $(1, 0)$ i det ögonblick då den passerar genom punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$?
-

En punkt på enhetscirkeln kan skrivas $(x, y) = (\cos at, \sin at)$, och om $a > 0$ rör sig denna punkt moturs med hastigheten $(x', y') = (-a \sin at, a \cos at)$ och farten blir $(x', y') = |(-a \sin at, a \cos at)| = a$. Vi väljer därför $a = 2$ (farten skulle vara 2 m/s). Vektorn från (x, y) till $(1, 0)$ är då $\sqrt{(1 - \cos 2t)^2 + (\sin 2t)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos 2t}$. Derivatan av detta uttryck ger oss hur snabbt partikelns avstånd till $(1, 0)$ ändras.

$$\frac{d}{dt} \sqrt{2 - 2 \cos 2t} = \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{2 - 2 \cos 2t}}$$

Eftersom punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ svarar mot $t = \frac{\pi}{8}$, så sätter vi in detta och får derivatan till

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ (det sista genom konjugatförlängning).}$$

Svar: $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ m/s.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 1)$, $C = (3, 1, 2)$, $D = (-1, 2, 1)$, $E = (0, 1, 2)$.

- Bestäm ekvationen för planet $\mathcal{P}$ genom A, B och C samt arean av triangeln med dessa tre hörn.
- Beräkna avståndet mellan punkten D och planet $\mathcal{P}$.
- Bestäm skärningspunkten mellan $\mathcal{P}$ och linjen genom D och E .

(OBS! Om du inte kan göra del (a) men vill ändå visa att du vet hur man gör (b) och (c), så kan du välja ditt egna valfria plan $\mathcal{Q}$ och arbeta med det i stället).

- a) Vi bildar två vektorer i planet:

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En normalvektor till planet är då

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & 1 & 2 \\ j & 2 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ och planets ekvation blir (använd punkten } A)$$

$$2(x-1) - (y-1) - 4(z-1) = 0 \iff \mathbf{2x - y - z = -3}$$

- b) Om α är vinkeln mellan normalvektorn $\mathbf{n}$ och vektorn $\vec{AD}$, så är det sökta avståndet lika med skalära projektionen av $\vec{AD}$ på $\mathbf{n}$:

$$|\vec{AD}| \cos \alpha = \frac{|\mathbf{n} \bullet \vec{AD}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\left| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|}{\left| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \right|} = \frac{5}{\sqrt{21}}$$

- c) Linjen genom D och E har parameterekvationen

$$(x, y, z) = D + t\vec{DE} = (-1, 2, 1) + t(1, -1, 1) = (-1 + t, 2 - t, 1 + t)$$

Sätt in dessa koordinater i planets ekvation, detta ger oss rätt parametervärde t :

$$2(-1 + t) - (2 - t) - 4(1 + t) = -3 \iff t = -5$$

vilket motsvarar skärningspunkten $(-6, 7, -4)$.

3. a) Formulera max-min-satsen för kontinuerliga funktioner.

b) Bestäm det största och minsta värdet som antas av funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ då $x \in [\frac{1}{2}, 10]$.

a) Max-min-satsen för kontinuerliga funktioner: En kontinuerlig funktion antar på ett slutet, begränsat intervall både ett största och ett minsta värde (Adams: section 1.4, theorem 8).

b) Max-min-satsen enligt a) är tillämplig här: f är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet $[\frac{1}{2}, 10]$. Vi vet också att f är deriverbar i hela intervallet, och att därmed största och minsta värdena antas i punkter där $f' = 0$ eller i intervallets ändpunkter.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Derivatan har ett enda nollställe $x = e$ med teckenväxlingen $+ 0 -$, dvs ett lokalt maximum med värdet $f(e) = e^{-1}$. I intervallets ändpunkter har vi värdena $f(0,5) = 2 \ln 0,5 = -2 \ln 2 = -\ln 4$ och $f(10) = \frac{\ln 10}{10}$. Vi jämför de tre värdena och finner att **minsta värdet är $-\ln 4$** (negativt!) och **största värdet är e^{-1}** (maximum).

Uppgift 4 på nästa sida.

4. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Ange alla asymptoter och lokala extrempunkter. Konkavitet/konvexitet behöver ej utredas!

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 1 + 1)}{x^2 - 1} = x\left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) = x + \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

Eftersom $f(x) - x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$, så är $y = x$ en asymptot i $\pm\infty$. Eftersom $f(x) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm 1^\pm$, så är $x = -1$ och $x = 1$ asymptoter. Några andra asymptoter kan inte finnas.

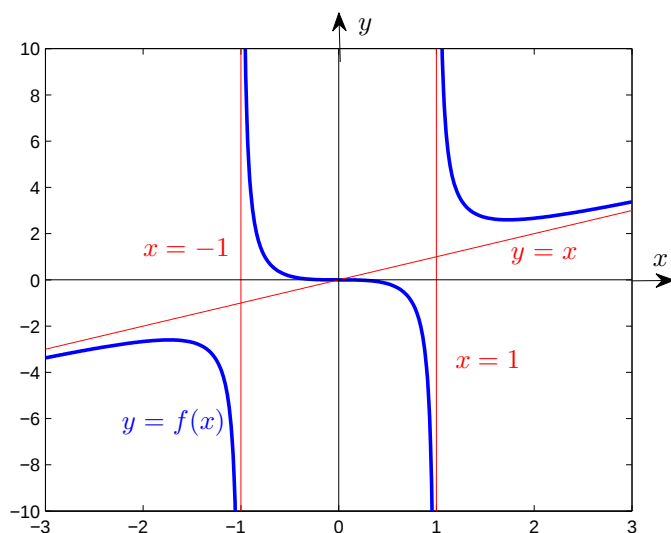
Vi undersöker också derivatan:

$$f'(x) = 1 + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x+1)(x-1)}$$

och gör en teckentabell:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
$f'(x)$		+	0	-	odef	-	0	-	odef	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	odef	$\searrow$	0	$\searrow$	odef	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	∞

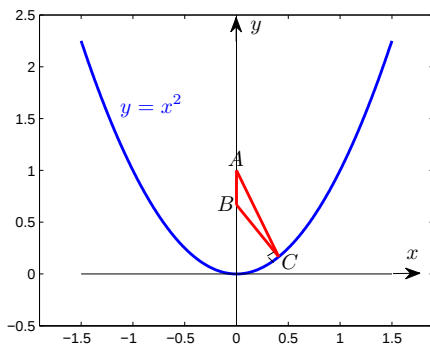
och med stöd av denna tabell ritar vi grafen:



Asymptoter: $y = x$, $x = -1$, $x = 1$

Lokalt maximum: $x = -\sqrt{3}$, **lokalt minimum:** $x = \sqrt{3}$

-
5. En triangel ABC har ett hörn i punkten $A = (0, 1)$. B är en punkt på y-axeln mellan A och origo, C är en punkt på kurvan $y = x^2$ sådan att kurvans normal genom denna punkt går genom B . Vad är den maximala arean för en sådan triangel?
-



Normalen till kurvan i punkten $C = (a, a^2)$ är

$$y - a^2 = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \iff y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) \iff y = -\frac{x}{2a} + \frac{1}{2} + a^2$$

Sätter vi in $x = 0$ så får vi koordinaterna för punkten $B = (0, \frac{1}{2} + a^2)$.

Triangeln ABC har basen $AB = 1 - (\frac{1}{2} + a^2) = \frac{1}{2} - a^2$ och höjden a (avståndet mellan C och y-axeln), så arean är $f(a) = \frac{1}{2}a(\frac{1}{2} - a^2) = \frac{a}{4} - \frac{a^3}{2}$ där $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (punkten B ska ju ligga mellan A och origo). Derivatans $f'(a) = \frac{1}{4} - \frac{3a^2}{2}$ har enda nollstället $a = \frac{1}{\sqrt{6}}$ i vårt intervall, och derivatans teckenväxling kring denna punkt är $+0-$, vilket ger lokalt och absolut maximum $f(\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{1}{6\sqrt{6}}$.

Uppgift 6 på nästa sida.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska.

På denna uppgift skulle lösningar inte lämnas in, men här kommer korta lösningar.

a) För alla vinklar $\theta \in \mathbb{R}$ gäller $\sin \theta \cos \theta \leq \frac{1}{2}$.

Svar: Sant. $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \leq \frac{1}{2} \cdot 1$.

b) Varje deriverbar funktion är kontinuerlig.

Svar: Sant. Påståendet är innehållet i en sats i kursen.

c) Om funktionen $f(x)$ är både begränsad och deriverbar så är $f'(x)$ också begränsad.

Svar: Falskt. Ta exemplet $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$, som är begränsad, men vars derivata är obegränsad.

d) Om $f'(x) > 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så är $f(x)$ inverterbar och $(f^{-1})'(y) < 1$ för alla $y \in \mathcal{V}_f$.

Svar: Sant. Eftersom $f'(x) > 0$ innebär att f är (strängt) växande, så är f inverterbar, och eftersom $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ har vi att $f'(x) > 1 \Rightarrow (f^{-1})'(y) < 1$.

e) Ekvationen $\cos x = x$ har exakt två lösningar då $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Svar: Falskt. I intervallet är $f(x) = \cos x - x$ (strängt) avtagande med $f(0) > 0$, $f(\frac{\pi}{2}) < 0$. Funktionen kan därmed bara anta värdet noll en gång i intervallet.

f) För alla vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$.

Svar: Falskt. Här var påståendet att $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ skulle gälla generellt. Även detta är falskt, eftersom kryssprodukterna $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ och $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ har motsatta riktningar, varmed skalärprodukterna med $\mathbf{c}$ får motsatta tecken.

-
7. a) Låt $f(x)$ vara en funktion som är definierad på ett öppet intervall (a, b) . Definiera vad som menas med att $f(x)$ är *växande* på (a, b) .
(Enligt Adams: *increasing*, ofta kallat *strängt växande*.)
- b) Bevisa att om $f(x)$ är deriverbar med positiv derivata i hela (a, b) , så är $f(x)$ växande på (a, b) .
-

Se Adams!
