

1. Till denna uppgift skulle bara lämnas svar, men här ges lite mera.

- a) $|x - 2| = 4$ betyder att $x - 2 = \pm 4$, vilket ger $x = -2, x = 6$.

Svar: $x = -2, x = 6$.

- b) Kedjeregeln ger $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Svar: $f'(x) = 2x/(x^2 + 1)$.

- c) Den utökade koefficientmatrisen A undergår radoperationer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Den sista matrisen är en reducerad trappstegsmatris, där tredje kolonnen saknar pivotelement. Det gör att z är en fri variabel som vi sätter till t : $z = t$. Den andra raden i matrisen ger nu att $y = 1 + t$ och den första att $x = 2 - t$.

Svar: $x = 2 - t, y = 1 + t, z = t$, där t är ett godtyckligt reellt tal. (Även andra sätt att ange lösningarna är möjliga.)

- d) Med $v = \arcsin(-5/6)$ har man att $\sin(v) = -5/6$ och att v ligger i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Detta ger, med den trigonometriska ettan, att $\cos(v) = \pm\sqrt{1 - (-5/6)^2}$, där bara det positiva värdet är aktuellt på grund av vinkelns restriktion. Man får $\cos(v) = \sqrt{11}/6 = \sqrt{11}/6$.

Svar: $\sqrt{11}/6$.

- e) $\alpha) \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \frac{\ln(1+2x)}{2x} \rightarrow 2 \cdot 1$ då $2x \rightarrow 0$ (standardgränsvärde)

eller använd l'Hopitals regel.

Svar: 2

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 5x)(1 + \cos 5x)}{x^2(1 + \cos 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{x^2(1 + \cos 5x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{x^2(1 + \cos 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 25 \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)^2 \frac{1}{(1 + \cos 5x)} = 25 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 12,5 \end{aligned}$$

eller använd l'Hopitals regel 2 ggr.

Svar: 12,5

- $\gamma)$ Förkorta med det dominerande uttrycket e^{2x} :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^x + x^4 + e^{2x}}{2x^2 e^x + 5x^4 + 3e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{e^x} + \frac{x^4}{e^{2x}} + 1}{2\frac{x^2}{e^x} + 5\frac{x^4}{e^{2x}} + 3} = \frac{0+0+1}{0+0+3} = \frac{1}{3}$$

(Exponentialfunktionen tillväxer snabbare än potensfunktionerna).

Svar: $\frac{1}{3}$

- f) Derivering av $y^3/x + x^2y = -4$ ger (tänk på y som en funktion av x)
 $(3y^2y'x - y^3)/x^2 + 2xy + x^2y' = 0$. Samlas allt som innehåller y' i vänstra ledet och resten i det högra får man

$$y' \left(\frac{3y^2x}{x^2} - x^2 \right) = \frac{y^3}{x} - 2xy.$$

Eftersom $x = -2$, $y = -2$ ger detta $y' \cdot (-2) = -10$, eller $y' = 5$.

Tangenten har alltså riktningskoefficient 5 och går genom $(-2, -2)$. Därför är $y = 5(x + 2) - 2 = 5x + 8$ en ekvation för tangenten.

Svar: $y = 5x + 8$.

2. a) Ur linjens parameterekvation avläser vi en vektor längs linjen (och därmed parallell med det sökta planet): $\mathbf{u} = (5, 2, 1)$, en punkt på linjen (och i planet) ser vi också: $A = (2, 1, 1)$. För övrigt ges en annan punkt i planet i uppgiften: $B = (3, -1, -2)$. Därmed kan vi få ännu en vektor parallell med planet:

$$\mathbf{v} = \vec{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Då vi behöver en vektor som är vinkelrät mot planet, beräknar vi kryssprodukten av de erhållna vektorerna:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 5 & 1 \\ \mathbf{j} & 2 & -2 \\ \mathbf{k} & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \\ -12 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och vi tar } \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

som normalvektor, vi vet då att planet har en ekvation av formen

$x - 4y + 3z = D$. Genom att sätta in en av punkterna, t ex $A = (2, 1, 1)$, får vi $D = 1$.

Svar: $x - 4y + 3z = 1$.

- b) Sätt in punktens koordinater i planets ekvation: $VL = 1 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 2$, $HL = 1$.
Eftersom $VL \neq HL$ så ligger punkten *inte* i planet.

Svar: Nej.

- c) Här är linjen given i koordinatfri form. Nämnarna ger oss denna gång en vektor

parallell med linjen: $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Linjen är vinkelrät mot planet om och endast

om $\mathbf{w}$ är en normalvektor till planet, dvs parallell med $\mathbf{n}$ i uppgift (a). Eftersom $\mathbf{w} = \mathbf{n}$ så är detta fallet.

Svar: Ja.

3. a) Derivering ger $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 = x^4(7x^2 + 5)$, som är > 0 utom i $x = 0$. Det ger att f är växande (strängt växande) och därför inverterbar.

- b) Sambandet mellan derivatorna av f och f^{-1} är $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, där $y = f(x)$.
Eftersom $x = 1$ ger $y = f(1) = 5$, så har vi $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{12}$

Svar: $1/12$.

4. Logaritmen är definierad för alla x sådana att $1 - 2x > 0$, dvs alla $x < 1/2$. Arcusfunktionen är definierad för alla x . Det ger att **definitionsområdet** är intervallet $(-\infty, 1/2)$.

Funktionen är kontinuerlig, så enda möjliga lodräta asymptoten är $x = 1/2$. Man har $f(x) \rightarrow -\infty$, när $x \rightarrow 1/2^-$, så $x = 1/2$ är en **lodrät asymptot**.

Sned asymptot kan bara finnas när $x \rightarrow -\infty$. En eventuell sådan har riktningskoefficient k , som ges av gränsvärdet av $f(x)/x$, när $x \rightarrow -\infty$. Man har

$f(x)/x = \ln(1 - 2x)/x + 2 \arctan(x)/x \rightarrow 0$, när $x \rightarrow -\infty$, för en positiv potens av x (i detta fallet $x = x^1$) dominerar över en logaritm och $\arctan(x)$ har gränsvärdet $-\pi/2$ då. Detta ger $k = 0$. Vidare gäller att $f(x) - kx = f(x) \rightarrow \infty$, när $x \rightarrow -\infty$. Alltså saknas asymptot då $x \rightarrow -\infty$.

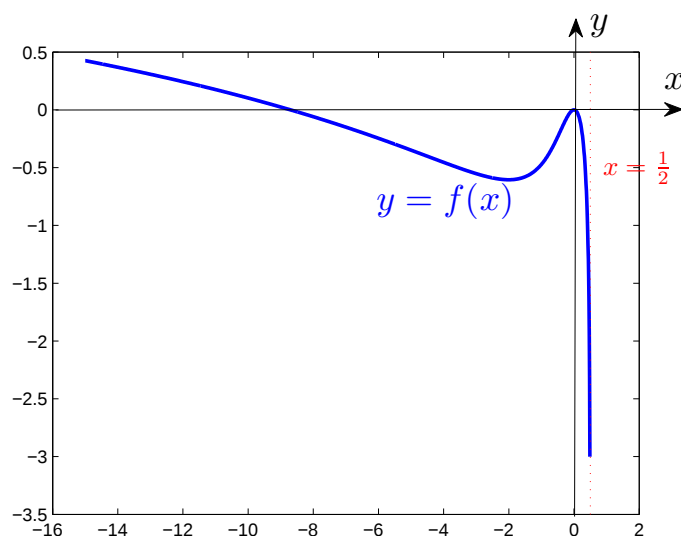
Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{1-2x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2(1+x^2) + 2(1-2x)}{(1-2x)(1+x^2)} = \\ &= \frac{-2(x^2+2x)}{(1-2x)(1+x^2)} = \frac{-2x(x+2)}{(1-2x)(1+x^2)}. \end{aligned}$$

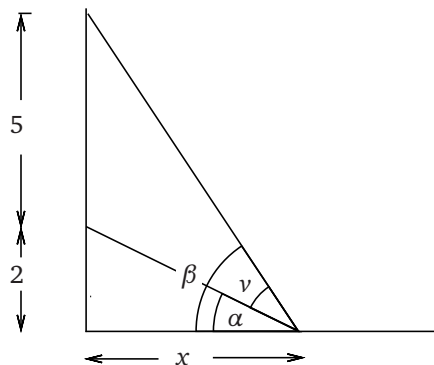
Detta ger två **stationära punkter**: -2 och 0 . Teckenstudium:

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vi drar slutsatsen att $x = -2$ är ett **lokalt minimum**, $x = 0$ ett **lokalt maximum**. Vidare utgörs **värdeområdet** av alla reella tal, dvs intervallet $(-\infty, \infty)$. Slutligen kan vi skissera grafen:



5. Inför beteckningar som i figuren:



Då gäller att $v = \beta - \alpha$. Man har också $\tan \beta = 7/x$ och $\tan \alpha = 2/x$. Av detta följer att $\beta = \arctan(7/x)$ och $\alpha = \arctan(2/x)$. Man får $v = v(x) = \arctan(7/x) - \arctan(2/x)$, som ska maximeras på intervallet $[0, \infty)$.

Derivering ger

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{1 + 49/x^2} \cdot \frac{-7}{x^2} - \frac{1}{1 + 4/x^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{2}{4 + x^2} - \frac{7}{x^2 + 49} = \\ &= \frac{-5(x^2 - 14)}{(4 + x^2)(x^2 + 49)} = \frac{-5(x - \sqrt{14})(x + \sqrt{14})}{(4 + x^2)(49 + x^2)}. \end{aligned}$$

Teckenstudium:

x	0		$\sqrt{14}$		∞
$v'(x)$		+	0	-	
$v(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Av detta ser vi att v har ett största värde när $x = \sqrt{14}$.

Svar: $\sqrt{14}$ m från sockeln.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

- a) Lösningarna till ekvationen $z^3 = a$ bildar en liksidig triangel i komplexa talplanet, med centrum i origo. Därmed kan de inte samlas i en och samma kvadrant.

Svar: Falskt.

- b) Derivering ger $f'(x) = 1 + \ln(x)$ och $f''(x) = 1/x$, som är > 0 , när $x > 0$. Alltså är f konvex då.

Svar: Sant.

- c) Enligt en sats i Adams (sats 4 i kapitel 3) gäller för alla $t > 0$ att $\ln t \leq t - 1$. Sätter vi $t = 1 + x$ så får vi just $\ln(1 + x) \leq x$ för alla $x > -1$.

Svar: Sant.

- d) En kontinuerlig funktion antar ett största och ett minsta värde på ett slutet bergränsat intervall. Enligt satsen om mellanliggande värde är värdemängden också ett intervall och därmed ett slutet begränsat intervall. Intervallet $(0, 1)$ är inte ett sådant intervall.

Svar: Falskt.

- e) Medelvärdessatsen ger att $f(2) - f(1) = f'(c)(2 - 1) = f'(c)$, för något c i intervallet $(0, 1)$. Eftersom $f(2) - f(1) = 24 - 15 = 9$ stämmer påståendet.

Svar: Sant.

- f) Definitionsmängden till f är mängden av alla x sådana att $(x - 2)(x - 5) \geq 0$. Det ger att f är definierad när $x < 2$ och när $x > 5$.

För g gäller att båda termer i summan ska vara definierade för att g ska vara det. Det ger att $2 < x$ och $5 < x$ samtidigt. Funktionen g är alltså definierad (bara) när $x > 5$.

Svar: Sant.

7. Se läroboken!