

Lösningar till Inledande matematik för V1 och AT1, (TMV125) 2012-01-14

1. (a) Faktorisering ger $15 = 3 \cdot 5$, $49 = 7^2$, och $35 = 5 \cdot 7$. Detta och förkortning ger

$$\frac{15^{16} \cdot 49^7}{35^{15} \cdot 3^{16}} = \frac{3^{16} \cdot 5^{16} \cdot 7^{2 \cdot 7}}{5^{15} \cdot 7^{15} \cdot 3^{16}} = \frac{5}{7}$$

Svar: $\frac{5}{7}$

- (b) Kedjeregeln ger $f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x$ och därmed $f'(1) = 2e^0 = 2$.

Svar: 2.

- (c) Den utökade koefficientmatrisen A undergår radoperationer:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -14 & -18 & 19 \\ 21 & -10 & 4 & -18 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/16 \end{bmatrix}$$

Resultatet är en matris på trappstegsform där sista kolonnen har pivot element. Alltså saknas lösning.

Svar: Det finns ingen lösning.

- (d) Man har att $\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v$ (formel för dubbla vinkeln).

Detta ger $\cos 2v = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Svar: $\frac{7}{9}$

- (e) i. Räkne regler för logaritmer ger att $\ln(2x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$. Eftersom $(2x+1)/x \rightarrow 2$, när $x \rightarrow \infty$, gäller att $\ln(2x+1) - \ln x \rightarrow \ln 2$ då.

Svar: $\ln 2$.

- ii. Kvoten $Q = \frac{(1+x)^{3/2}}{\ln(x+1)}$ är av typen "0/0" när $x \rightarrow 0$. Derivering av täljare

och nämnare för sig ger $Q_1 = \frac{(3/2)(1+x)^{1/2}}{(1/(1+x))}$, som har gränsvärdet $\frac{3}{2}$, när $x \rightarrow 0$. Enligt l'Hospitals regel har Q och Q_1 samma gränsvärde.

Annars kan man använda medelvärdessatsen på täljare och nämnare, de är av typen $\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}$ om man sätter $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}$ och $g(x) = \ln(x+1)$.

Enligt medelsatsen finns då tal c_1 och c_2 båda mellan 0 och 1 sådana att kvoten kan skrivas som $\frac{f'(c_1)(x-0)}{g'(c_2)(x-0)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$. Resultatet kommer precis som med l'Hospital, eftersom $c_1 \rightarrow 0$ och $c_2 \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$.

Svar: $\frac{3}{2}$.

- (f) Om $f^{-1}(\ln 3) = a$, så är $\ln 3 = f(a) = \ln \sqrt{1+a^3}$, så $3 = \sqrt{1+a^3}$ och alltså $9 = 1+a^3$. Det ger $a = 2$. Alltså är $f^{-1}(\ln 3) = 2$ och $\ln 3 = f(2)$.

För derivatan gäller nu att $(f^{-1})'(\ln 3) = \frac{1}{f'(2)}$.

Med $f(x) = \ln \sqrt{1+x^3} = \frac{1}{2} \ln(1+x^3)$, är

$$f'(x) = \frac{1}{2} (3x^2/(1+x^3)) = 3x^2/(2(1+x^3)), \quad f'(2) = \frac{2}{3} \text{ och alltså är}$$

$$(f^{-1})'(\ln 3) = \frac{3}{2}.$$

Den sökta tangenten går alltså genom punkten $(\ln 3, 2)$ och har lutningen $\frac{3}{2}$. Den har därför ekvationen $y - 2 = \frac{3}{2}(x - \ln 3)$

Svar: $y = \frac{3x}{2} + 2 - \frac{3 \ln 3}{2}$.

2. (a) Planet går genom de tre punkterna A , B och C , så $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ är vektorer parallella med planet.

En normalvektor till planet ges av

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Planet har därför en ekvation $4x - 3y - 6z = d$. Det går genom $A = (2, 1, 1)$, så $8 - 3 - 6 = d$.

Svar: $4x - 3y - 6z = -1$.

- (b) Avstånd en punkt D och planet är lika med längden av vinkelräta projektionen av vektorn $\overrightarrow{AD}$ på normalens riktning. Med normalvektorn $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ är detta

$$\text{avstånd lika med } \frac{|\mathbf{n} \bullet \overrightarrow{AD}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{61}} \left| \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right| = \frac{7}{\sqrt{61}}$$

Svar: $\frac{7}{\sqrt{61}}$.

- (c) Punkten D ligger på linjen bara om $\overrightarrow{AD}$ är parallell med normalen $\bar{\mathbf{n}}$ till planet.

Men $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ är inte parallella, eftersom de har samma första (och andra) koordinat men olika tredje.

Svar: Nej.

3. Eftersom $\sqrt{2x+1}$, bara är definierat när $2x+1 \geq 0$, dvs när $x \geq -1/2$, är definitionsmängden intervallet $[-1/2, \infty)$.

Derivering med hjälp av produkt- och kedjereglen ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2-x} \cdot D(-x^2-x) \cdot \sqrt{2x+1} + e^{-x^2-x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \\ &= -e^{-x^2-x} \left((2x+1)\sqrt{2x+1} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right) = -\frac{e^{-x^2-x}}{\sqrt{2x+1}} \cdot ((2x+1)^2 - 1) = \\ &= -\frac{e^{-x^2-x}}{\sqrt{2x+1}} \cdot (x+1)(4x) \end{aligned}$$

Här är kvoten i uttrycket alltid ≥ 0 , så tecknet på f' bestäms av tecknet på $-4x(x+1)$, som på intervallet $x > -1/2$ bara byter tecken i $x = 0$ och där går från positivt till negativt.

Det betyder att f växer på $[-1/2, 0]$ och avtar på $[0, \infty)$. Detta ger att f 's största värde är $f(0) = 1$.

Av $f(x) = e^{-x^2-x}\sqrt{2x+1}$, ser vi att $f(x) \geq 0$, för alla x och att $f(-1/2) = 0$ som alltså är f 's minsta värde.

Eftersom f är kontinuerlig på intervallet $[-1/2, \infty)$ är värdemängden ett intervall. Av det som framkommit måste det vara $[0, 1]$.

Svar: Definitionsmängden är $[-1/2, \infty)$ och värdemängden är $[0, 1]$.

4. För nämnaren gäller att $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, så den har nollställena -1 och 2 . Detta ger att definitionsmängden är alla reella tal utom -1 och 2 .

Inget av dessa tal är nollställen till täljaren, så vi har de lodräta asymptoterna $x = -1$ och $x = 2$. Specifikt gäller

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{när} & x \rightarrow -1^- \\ -\infty & \text{när} & x \rightarrow -1^+ \\ -\infty & \text{när} & x \rightarrow 2^- \\ \infty & \text{när} & x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

När $x \rightarrow \pm\infty$, gäller att $f(x) \rightarrow 3$, så att $y = 3$ är en vågrät asymptot så väl när $x \rightarrow \infty$, som när $x \rightarrow -\infty$.

Vi avgör var f växer och avtar genom att undersöka f' . Före derivering gör vi polynomdivision (förenklar deriveringen) och får

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 - x - 2} = 3 - \frac{3x - 9}{x^2 - x - 2}.$$

Derivering enligt kvotregeln ger nu

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3(x^2 - x - 2) - (3x - 9)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = -\frac{3x^2 - 18x + 15}{(x^2 - x - 2)^2} = \\ &= \frac{(x - 1)(3x - 15)}{(x - 2)^2(x + 1)^2} = 3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 2)^2(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Det betyder att f' växlar tecken i 1 och 5.

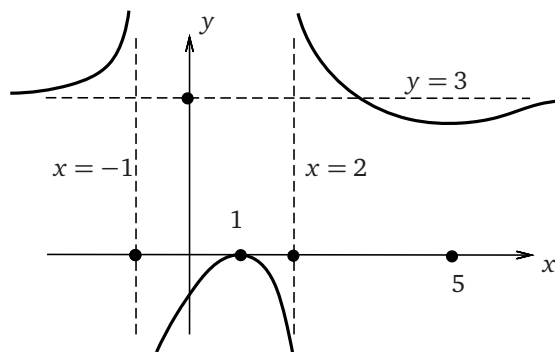
Det ger följande teckenstudium:

x	$-\infty$		-1		1		2		5		∞
$f'(x)$		+	odef	+	0	-	odef	-	0	+	
$f(x)$	3	$\nearrow$	odef	$\nearrow$	0	$\searrow$	odef	$\searrow$	8/3	$\nearrow$	3

som visar att f växer på intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1]$ och $[5, \infty)$, medan den avtar på $[1, 2]$ samt $(2, 5]$.

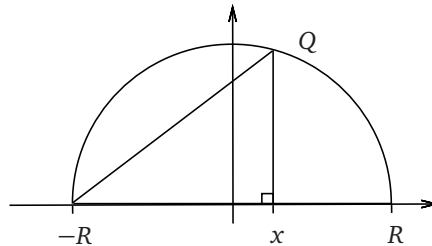
Av detta följer att f har ett lokalt maximum $f(1) = 0$ i $x = 1$ och ett lokalt minimum $f(5) = 3 - 1/3 = 8/3$ i $x = 5$.

Detta ger oss grafen



Vi ser nu att värdemängden är $(-\infty, 0] \cup [8/3, \infty)$.

5. Inför beteckningar som i figuren:



Triangeln har då basen $x - (-R) = x + R$ och höjden $\sqrt{R^2 - x^2}$, så att arean är $(x + R)\sqrt{R^2 - x^2}/2$, där $-R \leq x \leq R$.

Vi söker största värdet av $f(x) = (x + R)\sqrt{R^2 - x^2}$ på intervallet $[-R, R]$. Svaret är hälften av detta.

Derivering ger

$$f'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{(x + R)(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2 - x^2 - Rx - x^2}{\sqrt{R^2 - Rx - 2x^2}} = \frac{(R - 2x)(R + x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

som på intervallet $(-R, R)$ bara växlar tecken i $x = R/2$ och där går från positivt till negativt när x passerar $R/2$ från vänster till höger. Det betyder att f 's största värde antas när $x = R/2$ och att det är $f(R/2) = (3R/2)R\sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}R^2/4$.

Triangelns största area är alltså $3\sqrt{3}R^2/8$.

Svar: $3\sqrt{3}R^2/8$.

6. (a) Om $\bar{z} = 3/z$, så är $|z|^2 = z\bar{z} = 3$ och $|z| = \sqrt{3}$, som är < 2 , så påståendet stämmer

Svar: Sant.

- (b) När $t \rightarrow 0^+$, gäller att $\ln t \rightarrow -\infty$. Detta ger att $\ln |x| \rightarrow -\infty$, när $x \rightarrow 0$ och att $1/\ln |x| \rightarrow 0$ då. Alltså gäller att $x \ln |x| \rightarrow 0 = f(0)$, när $x \rightarrow 0$. Det betyder att f är kontinuerlig i $x = 0$.

Svar: Sant.

- (c) Det gäller att värdemängden för $\arccos$ är intervallet $[0, \pi]$. Eftersom $4 > \pi$ kan påståendet inte vara sant.

Svar: Falskt.

- (d) Eftersom $f'(t) \rightarrow 1$, när $t \rightarrow \infty$, så gäller att $f'(t) > 1/2$, för alla tillräckligt stora värden på t . Enligt medelvädessatsen gäller att $f(x+1) - f(x) = f'(t)(x+1-x) = f'(t)$, för något t mellan x och $x+1$. För alla tillräckligt stora värden på x gäller därmed att $f(x+1) - f(x) > 1/2$, eller att $f(x+1) > f(x) + 1/2$. Påståendet stämmer alltså.

Svar: Sant.

- (e) Med $f(x) = 2x^2$ gäller att $f'(x) = 4x$ och att $f'(1) = 4$. Det ger att normalens riktningskoefficient är $-1/4$. Den går genom $(1, 2)$, så en ekvation för normalen är $y = (-1/4)(x - 1) + 4$. När $x = 4$ blir $y \neq 0$. Punkten $(4, 0)$ ligger alltså inte på normalen.

Svar: Falskt.

- (f) Derivering av $f(x) = e^{-x^2-x}$ ger $f'(x) = e^{-x^2-x}(-2x-1)$ som växlar tecken från positivt till negativt i $x = -1/2$. Det betyder att f har ett lokalt maximum i $x = -1/2$. Påståendet stämmer alltså inte.

Svar: Falskt.