

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från hösten 2011 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 24/10.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/1112/

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) För vilka reella tal x är $|x - 1| > |x + 3|$? (2p)

b) För vilket eller vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ saknar ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + az = 6 \end{cases}$$

lösning?

c) Låt $f(x) = \tan x$, definierad för $x \in [0, \pi)$, $x \neq \frac{\pi}{2}$.
Existerar $f^{-1}(1)$ och vad är i så fall detta värde? (2p)

d) För vilka reella tal x gäller $\sin\left|\frac{x+5}{3-x}\right| \geq 2 \cos \frac{\pi}{4}$? (2p)

e) Derivera $f(x) = e^{\sin^2 x}$. (2p)

f) Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i så fall: (4p)

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$, ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sin x}{x - 2 \ln |x|}$, iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(3+x)}$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm en ekvation för det plan Π som är ortogonalt mot planet $x + y - z = 2$ och innehåller linjen genom punkterna $(1, 0, -1)$ och $(0, 1, 1)$. (3p)

b) Bestäm på parameterform, linjen ℓ som går genom punkten $(1, 2, 1)$ och som är ortogonal mot $x + y - z = 2$. (2p)

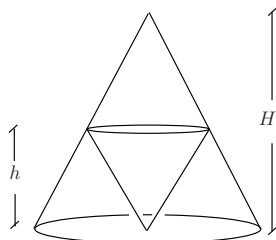
c) Skär linjen ℓ planet Π och i så fall var? (1p)

3. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \arctan x$. (6p)

Var god vänd!

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$. Ange speciellt funktionens definitionsmängd och värdemängd, eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

5. En rät cirkulär kon (alltså en 'vanlig kon') med höjden h är inskriven i en större cirkulär kon med höjden H så att spetsen på de lilla konen vilar mot centrum av basen på den stora. Visa att den lilla konens volym blir maximal då $h = \frac{H}{3}$. (6p)



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- a) Om z är ett komplext tal sådant att $|z - 1 - i| < \sqrt{2}$, så är $|z| < 2\sqrt{2}$.
- b) Det är möjligt att finna en funktion som är deriverbar i $x = 2$ men inte kontinuerlig i denna punkt.
- c) $\arccos(\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) = 0$.
- d) För alla $x > 0$ gäller $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.
- e) Funktionen $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x-2)^9}$ har ett nollställe i intervallet $(1, 2)$.
- f) Låt $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin \frac{1}{x} & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & \text{då } x = 0 \end{cases}$. Då gäller att $f'(0) = 0$.

7. Visa att om $f'(x) > 0$ i ett intervall I , så är f strängt växande (terminologi enligt Adams: increasing) i I . Formulera också den sats som används i detta bevis. (6p)