

1. I denna uppgift skulle ges enbart svar, men här kommer förstås korta lösningar.

a) Olikheten $|x - 1| > |x + 3|$ har den geometriska tolkningen att avståndet från x till 1 är större än från x till -3. Detta gäller till vänster om mittpunkten mellan talen 1 och -3 på tallinjen, dvs då $x < -1$.

$$\text{b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & a & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & a-4 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{array} \right]$$

Härav ser vi att enda möjligheten att få ett pivotelement i högerledet är att $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, vilket alltså är det enda värdet som ger ett ekvationssystem som saknar lösningar.

c) Funktionen är injektiv (växer från noll i $[0, \frac{\pi}{2})$, växer strängt mot noll i $[\frac{\pi}{2}, \pi)$) och $\tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

d) $\sin \left| \frac{x+5}{3-x} \right| \geq 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$ ger att det inte finns lösningar.

$$\text{e)} f'(x) = e^{\sin^2 x} \frac{d}{dx}(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} (2 \sin x \frac{d}{dx}(\sin x)) = 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} = \sin 2x e^{\sin^2 x}.$$

$$\text{f)} (i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sin x}{x - 2 \ln |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}(2 + \frac{\sin x}{x})}{\cancel{x}(1 - \frac{2 \ln |x|}{x})} = \frac{2+0}{1-0} = 2,$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(3+x)} = \frac{0}{\ln 3} = 0$$

(Här hade det blivit ett något annorlunda gränsvärde än vad det var tänkt, men detta blev ju åtminstone ganska lätt).

$$2. \text{ a) Planet } x + y - z = 2 \text{ har normalvektor } \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ Linjen genom } P_1 = (1, 0, -1) \text{ och } P_2 = (0, 1, 1) \text{ har riktningsvektor } \mathbf{v} = \overrightarrow{P_2 P_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{En normalvektor } \mathbf{n}_\pi \text{ för det sökta planet } \pi \text{ är alltså ortogonal mot } \mathbf{n} \text{ och } \mathbf{v} \text{ och alltså kan vi ta } \mathbf{n}_\pi = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 1 & 1 \\ \mathbf{j} & -1 & 1 \\ \mathbf{k} & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ så}$$

att det sökta planet π har ekvation $3x - y + 2z = D$ för ngt reellt tal D . Insättning av en punkt i planet, t ex P_1 , ger $D = 1$. Alltså är ekvationen för det sökta planet $3x - y + 2z = 1$.

b) Den sökta linjen ℓ har som riktningsvektor vektorn $\mathbf{n}$ från (a). Alltså är på parameterform ekvationen för linjen $(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(1, 1, -1)$, där $t \in \mathbb{R}$.

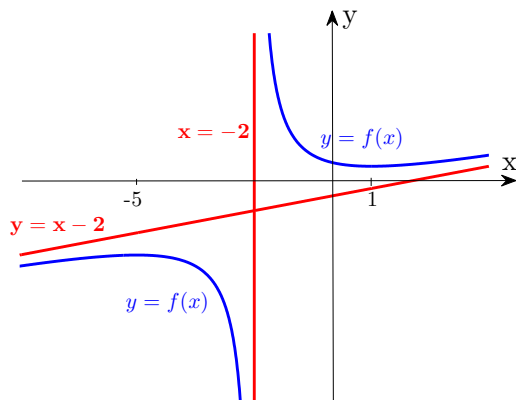
c) Insättning av koordinaterna (x, y, z) för linjen ℓ i ekvationen för planet π ger en likhet som inte beror på t och som inte är sann; alltså finns det ingen punkt på linjen ℓ som också ligger i planet π . Detta inser vi ju också direkt ty linjen ℓ är parallell med planet π så linjen ligger antingen helt i planet eller helt utanför planet och då punkten $(1, 2, 1)$ på linjen ej ligger i planet så **kan alltså linjen inte skära planet**.

3. Definitionsmängden för f är $\mathbb{R} \setminus 0$. Då $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} > 0$ är funktionen strängt växande både i $(-\infty, 0)$ och i $(0, \infty)$. Vidare är $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 + \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 - \frac{\pi}{2}$. Alltså är $V_f = \mathbb{R} \setminus [1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}] = (-\infty, 1 - \frac{\pi}{2}) \cup (1 + \frac{\pi}{2}, \infty)$.

4. Vi noterar att $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Polynomdivision eller omskrivning $f(x) = \frac{(x+2-2)^2+5}{x+2} = \frac{(x+2)^2+4-2 \cdot 2(x+2)+5}{x+2} = \frac{(x+2-4)(x+2)+9}{x+2} = x - 2 + \frac{9}{x+2}$ ger och vi ser att linjen $y = x - 2$ är asymptot både i $+\infty$ och $-\infty$. Vidare är $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, vilket innebär att linjen $x = -2$ också är en asymptot till grafen. Vidare $f'(x) = 1 - 9 \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$.

Teckenstudietabell	x		-5		-2		1	
	f'	+	0	-	$ej \ def$	-	0	+
	f	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$ej \ def$	$\searrow$	2	$\nearrow$

ger en graf som i figuren:



$$\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty), \mathcal{V}(f) = (-\infty, -10] \cup [2, \infty).$$

Asymptoter: $x = -2$ och $y = x - 2$, lokalt maximum i $x = -5$, lokalt minimum i $x = 1$.

5. Om vi kallar radierna i konernas baser för r (lilla konen) och R (stora konen), så har vi genom likformighet: $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$. Förhållandet mellan lilla konens och stora konens volymer blir

$$\frac{\frac{\pi r^2 h}{3}}{\frac{\pi R^2 H}{3}} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{h}{H} = \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 \frac{h}{H} = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 \frac{h}{H} = \left\{\text{sätt } \frac{h}{H} = x\right\} = (1-x)^2 x = \mathbf{x - 2x^2 + x^3 =: f(x)}, \quad \mathbf{0 \leq x \leq 1}$$

Vi har fått en funktion f som uttrycker den lilla konens andel av den stora som funktion av förhållandet mellan konernas höjder. Derivering ger $f'(x) = 1 - 4x + 3x^2$, och vi söker derivatans nollställen:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \iff x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{3} \text{ eller } x = 1$$

derivatans teckenväxling kring $x = \frac{1}{3}$ är $+0-$, vilket visar att detta är ett lokalt maximum, men också globalt maximum. (För $x = 0$ och $x = 1$ är ju volymen noll.) Vi har alltså visat att volymen maximeras då den lilla konens höjd är en tredjedel av den stora konens höjd.

6. Svar: **SFSSSS**

a) Olikheten kan skrivas $|z - (1 + i)| < \sqrt{2}$ som geometriskt betyder de tal z i komplexa talplanet som ligger strikt inuti en cirkel med radie $\sqrt{2}$ centrerad i $1 + i$. Avståndet från origo till punkten $1 + i$ är $\sqrt{2}$ så alla punkter z inuti cirkeln har alltså ett avstånd mindre än $2\sqrt{2}$ till origo; dvs uppfyller $|z| < 2\sqrt{2}$.

b) Ett resultat i kursen säger att om en funktion är deriverbar i en punkt så är den också kontinuerlig där.

c) Det gäller att $\arccos(\sqrt{2}\sin \frac{\pi}{4}) = \arccos(\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos 1 = 0$.

d) Låt $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$. Då gäller $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x})$ och teckenstudietabell visar att $f(1)$ globalt minimivärde så att $0 = f(1) \leq f(x)$ för $x > 0$; vilket är den första olikheten. Den andra olikheten bevisas på ett snarligt vis, eller så känner man igen den som en sats i kursen.

e) Vi har att $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ och att $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$. Därför finns det ett $x_1 > 1$ och ett $x_2 < 2$ med $f(x_1) > 0$ och $f(x_2) < 0$. Då f är kontinuerlig, gäller enligt satsen om mellanliggande värde att f är noll någonstans på intervallet (x_1, x_2) och därmed också i $(1, 2)$.

f) Definitionen ger $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h \sin(1/h) - 0}{h}$ och då vi vet att $|\sin h| \leq |h|$ och att $|\sin(1/h)| \leq 1$, så får vi

$$0 \leq \left| \frac{\sin^2 h \sin(1/h)}{h} \right| = \frac{|\sin h|^2 |\sin(1/h)|}{|h|} \leq \frac{|h|^2 \cdot 1}{|h|} \leq |h| \rightarrow 0$$

Av instängningslagen ser vi att $f'(0) = 0$,

7. Se kursboken.