

1. I denna uppgift skulle ges enbart svar, men här kommer förstås korta lösningar.

a) Systemets utökade koefficientmatris utsätts för radoperationer:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger att z är en fri variabel, så vi kan sätta $z = t$. Andra raden ger då $y = 1 - t$ och första att $x = 2$.

Svar: $x = 2$, $y = 1 - t$ och $z = t$, där t är ett godtyckligt reellt tal.

b) Ta t. ex. $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Skalarprodukterna mellan dessa och den givna vektorn är noll, så de är vinkelräta mot den. Ingen av två nya vektorerna är en multipel av den andra, så de är inte parallella.

Svar: T. ex. $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) Polär framställning ger $-8i = 2^3 \cdot e^{-i\pi/2}$, vilket ger att $z = 2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/4}$ är en lösning till ekvationen. Vi har $2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/4} = 2\sqrt{2}(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}) = 2 - 2i$ (den andra lösningen är $-2 + 2i$).

Svar: T.ex. $z = 2 - 2i$.

d) Man har $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$ och $f''(x) = e^{-x}(-1 + x - 1) = e^{-x}(x - 2)$, som är positiv precis när $x > 2$. Därmed är f konvex då $x \in (2, \infty)$

Svar: $(2, \infty)$.

e)

α Förkortning med e^x ger $f(x) = (1 + 2xe^{-x} - e^{-x})/(2 + xe^{-x} - 2e^{-x})$. Eftersom $xe^{-x} \rightarrow 0$ och $e^{-x} \rightarrow 0$, när $x \rightarrow \infty$, gäller att $f(x) \rightarrow (1 + 0 - 0)/(2 + 1 - 0) = 1/2$ då.

Svar: $1/2$

β Förkortning med x ger $f(x) = (e^x/x + 2 - 1/x)/(2e^x/x + 1 - 2/x)$. Eftersom $e^x/x \rightarrow 0$ och $1/x \rightarrow 0$, när $x \rightarrow -\infty$, gäller att $f(x) \rightarrow (0 + 2 - 0)/(0 + 1 - 0) = 2$ då.

Svar: 2

γ Gränsvärde är av typen $\infty/0$. Sätt $Q_1 = (e^x + 2x - 1)/(2e^x + x - 2)$, d.v.s $Q_1 = (e^x + 2)/(2e^x + 1)$, som har gränsvärdet $(1 + 2)/(2 + 1) = 1$, när $x \rightarrow 0$. L'Hospitals regel ger att även $f(x)$ har gränsvärdet 1, när $x \rightarrow 0$.

Svar: 1

f) Derivering av de båda leden ger

$$8y^3y' + 3x^2 = 2xy^3 + 3x^2y^2y'.$$

Insättning av $x = -1$ och $y = 1$ ger $8y' + 3 = -2 + 3y'$, som ger $y' = -1$ och att tangenten har riktningskoefficienten -1 . Tangenten går genom punkten $(-1, 1)$ och har alltså ekvationen $y = 1 - 1(x + 1)$.

Svar: $y = -x$.

2. a) Från ekvationen för planet får vi att det har normalen $\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ som också är en riktningsvektor för linjen. Den ska gå genom punkten $(2, -3, 4)$, vilket ger att den har parameterframställningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Som ger parameterframställningen $x = 2 + 3t$, $y = -3 + 6t$, $z = 4 + 2t$, där t är ett godtyckligt reellt tal. Ur detta löser vi ut t och får

$$(t =) \frac{x - 2}{3} = \frac{y + 3}{6} = \frac{z - 4}{2},$$

som är en parameterfri framställning av linjen.

Svar: $x = 2 + 3t$, $y = -3 + 6t$, $z = 4 + 2t$, där t är ett godtyckligt reellt tal, respektive $\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 3}{6} = \frac{z - 4}{2}$.

b) Om $\mathbf{u}$ är vektorn från punkten $(2, -3, 4)$ på linjen till punkten $(3, -2, 4)$, och om $\mathbf{v}$ är riktningsvektorn för linjen (hämtad ur dess ekvation), så är avståndet $\frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 - 2 \\ -2 - (-3) \\ 4 - 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Detta ger $d = \sqrt{4 + 4 + 9}/\sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{17}/7$

Svar: $\sqrt{17}/7$.

3. Funktionens definitionsmängd består av alla reella tal eftersom nämnaren saknar nollställe. Eftersom funktionen är kontinuerlig kommer värdemängden därför att vara ett intervall.

Vi har

$$f(x) = \frac{(x^2 + 4) + 2x + 3}{x^2 + 4} = 1 + \frac{2x + 3}{x^2 + 4}$$

Detta ger att $f(x) \rightarrow 1$, när $x \rightarrow \pm\infty$, eftersom polynomet i täljaren i det återstående bråket är av lägre grad än det i nämnaren.

Derivering av omskrivningen av $f(x)$ ger

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 4) - (2x + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 6x - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2(4 - 3x - x^2)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2(1 - x)(4 + x)}{(x^2 + 4)^2}$$

Teckenstudium ger att $f' > 0$ och därmed f är växande på $[-4, 1]$ och $f' < 0$ och därmed f avtagande på $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$. Vi har $f(-4) = 1 + (-5)/20 = 3/4$ och $f(1) = 1 + (5/5) = 2$. Eftersom $f(x) \rightarrow 1$, när $x \rightarrow \pm\infty$, ger detta att $f(x)$ har ett minsta värde $3/4$ och ett största värde 2 .

Svar: Värdemängden är $[3/4, 2]$.

4. Definitionsmängden till $f(x)$ består av alla reella tal.

Eftersom $\arctan t \rightarrow \pi/2$, när $t \rightarrow \infty$ och $\arctan t \rightarrow -\pi/2$, när $t \rightarrow -\infty$, gäller att $f(x) \rightarrow 0$, när $x \rightarrow \pm\infty$. Den enda sneda/horisontella asymptoten är $y = 0$. Lodrät asymptot saknas.

Derivering (med kedjeregeln) ger

$$f'(x) = \frac{3}{1 + 9x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{3(1 + x^2) - (1 + 9x^2)}{(1 + 9x^2)(1 + x^2)} = \frac{2(1 - 3x^2)}{(1 + 9x^2)(1 + x^2)} = \frac{2(1 - \sqrt{3}x)(1 + \sqrt{3}x)}{(1 + 9x^2)(1 + x^2)}.$$

Teckenstudietabell

x	$ $	$-1/\sqrt{3}$	$ $	$1/\sqrt{3}$	$ $	
f'	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$ $	$\searrow$	$-\pi/6$	$\nearrow$	$\pi/6$	$\searrow$

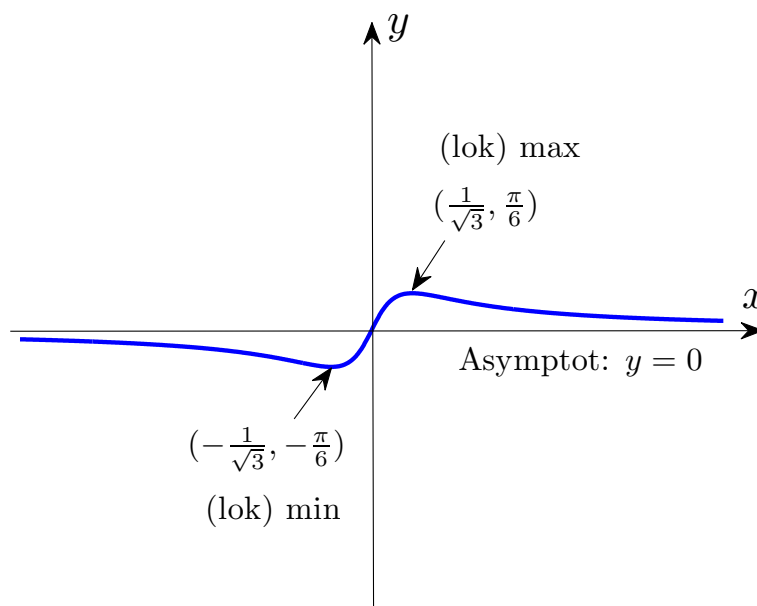
Vi ser att $f(x)$ är avtagande på $(-\infty, -1/\sqrt{3}] \cup [1/\sqrt{3}, \infty)$ och växande på $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$. Eftersom $f(x) \rightarrow 0$, när $x \rightarrow \pm\infty$, har $f(x)$ har sitt största värde i $1/\sqrt{3}$, som alltså är en (lokal) max-punkt och sitt minsta värde i $-1/\sqrt{3}$.

Vi har $f(1/\sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$.

Vi konstaterar att $f(x)$ är **udda** ($f(-x) = -f(x)$) och har $f(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$. Vi kunde ha nöjt oss med att studera kurvan för $x \geq 0$ och komplettera för negativa x genom speglingar.

Vi ser också att värdemängden till $f(x)$ är $[-\pi/6, \pi/6]$.

Informationen ovan leder till följande skiss



Svar Den enda asymptoten är $y = 0$. Funktionen är udda och har en lokal max-punkt i $1/\sqrt{3}$ och en lokal min-punkt i $-1/\sqrt{3}$.

5. När $k \leq 0$ saknas lösning eftersom $e^{2x} > 0$ och $\sqrt{x} \geq 0$.

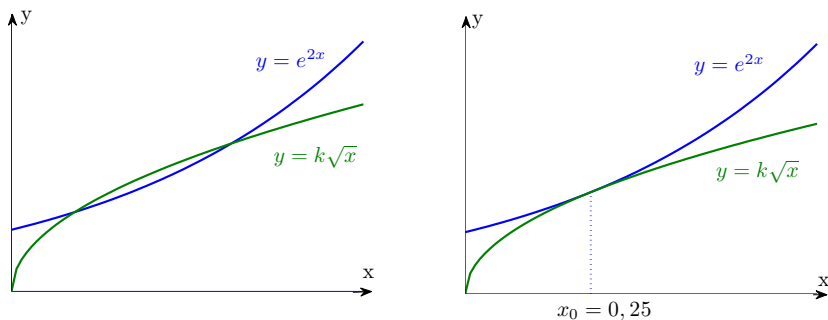
Vi undersöker vad som händer när $k > 0$. Ekvationen kan skrivas $1/k = \sqrt{x}e^{-2x}$. För att underlätta räkningarna sätter vi $t = \sqrt{x}$ och ska undersöka när $1/k = te^{-2t^2}$ har en entydig lösning $t > 0$.

Vi sätter $f(t) = te^{-2t^2}$, $t \geq 0$ och har $f'(t) = e^{-2t^2}(1 - 4t^2) = e^{-2t^2}(1 - 2t)(1 + 2t)$. Vilket ger att $f(t)$ är strängt växande på $[0, 1/2]$ och strängt avtagande på $[1/2, \infty)$. Eftersom $f(0) \rightarrow 0$, när $t \rightarrow 0$ och $f(t) \rightarrow 0$, när $t \rightarrow \infty$, men betyder det att varje värde mellan 0 och $f(1/2)$ antas två gånger av $f(t)$. Det enda värden som bara antas en gång av $f(t)$ är $f(1/2) = e^{-1/2}/2$. Detta ger att k ska vara $1/f(1/2) = 2\sqrt{e}$ för att den givna ekvationen ska ha precis en lösning.

Här kommer en alternativ lösningsvariant, som gjordes av några tentander:

Grafen till $f(x) = e^{2x}$ är (strängt) konvex och grafen till $g(x) = k\sqrt{x}$ är (strängt) konkav om $k > 0$ (som måste gälla om lösning finns). Detta betyder att kurvorna måste skära varandra på två olika ställen eller tangera varandra på ett ställe (detaljerad motivering krävs inte - detta är i alla fall en mycket bra observation!) om det alls finns någon lösning. Vi vill alltså bestämma k så att kurvorna tangerar varandra. I tangeringspunkten x_0 ska därför gälla både att $f(x_0) = g(x_0)$ och att $f'(x_0) = g'(x_0)$, dvs $e^{2x_0} = k\sqrt{x_0}$ och $2e^{2x_0} = k/(2\sqrt{x_0})$, vilket snart ger oss först $x_0 = 1/4$, sedan $k = 2\sqrt{e}$. Den vänstra figuren visar hur det ser ut med ett $k > 2\sqrt{e}$, den högra visar fallet $k = 2\sqrt{e}$. Om k är mindre, blir det ingen skärning.

Svar: $k = 2\sqrt{e}$



6. (a) $f(x) = \arctan(x)$ är strängt växande men $f(x)$ går inte mot ∞ , när $x \rightarrow \infty$, så påståendet är falskt.

Svar: Falskt.

- (b) $f(x) = e^{-x}$ är konvex och strängt avtagande, så påståendet stämmer.

Svar: Sant.

- (c) Om $z_0^n = 1$, så är $|z_0|^n = 1$, vilket ger $|z_0| = 1$. Därmed är $z_0 \bar{z}_0 = |z_0|^2 = 1$. Om vi multiplicerar båda sidor i $z_0^n = 1$ med $\bar{z}_0$ får vi därför $\bar{z}_0 z_0^n = \bar{z}_0 \iff \bar{z}_0 z_0 z_0^{n-1} = \bar{z}_0 \iff 1 \cdot z_0^{n-1} = \bar{z}_0$

Svar: Sant.

7. Se kursboken.