

1. I denna uppgift skulle ges enbart svar, men här kommer förstås korta lösningar.

a) Vi skriver olikheten $x + \frac{1}{x} - 2 < 0$ och skriver därefter vänstra ledet på gemensamt bråkstreck och faktorerar:

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} < 0$$

Vi ser att täljaren alltid är ≥ 0 , så tecknet på högra ledet avgörs helt av nämnaren. Detta ger

Svar: för $x < 0$.

b) Systemets utökade koefficientmatris utsätts för radoperationer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & a & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & a+4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & a+5 & 5 \end{array} \right]$$

Systemet saknar lösning om den sista trappstegsmatrisen har ett pivotelement i högerledskolonnen. Detta inträffar bara om $a = -5$.

Svar: $a = -5$.

c) Sätt det givna talet till z . Vi har då $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (\sqrt{48})^2} = \sqrt{64} = 8$. För att bestämma ett argument θ för z ska vi hitta en lösning till systemet

$$\begin{cases} \cos \theta &= \operatorname{Re}(z)/|z| = -4/8 = -1/2 \\ \sin \theta &= \operatorname{Im}(z)/|z| = \sqrt{48}/8 = 4\sqrt{3}/8 = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

En lösning ges av $\theta = 2\pi/3$.

Svar: Beloppet är 8 och ett argument är $2\pi/3$.

d) Vektorn $\overrightarrow{AB}$ har koordinater

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4-0 \\ 3-2 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De två vektorerna är vinkelräta mot varandra precis när deras skalärprodukt är 0. Detta ger ekvationen

$$0 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 + a - 2$$

Detta ger $a = -2$.

Svar: när $a = -2$.

e) Vi söker en parameterframställning av linjen och sätter

$$t = \frac{x+4}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}$$

Vi löser ut x , y och z och får $x = -4 + 2t$, $y = 3t$, $z = 2 + 5t$, som i planets ekvation ger

$$2 = 2(-4 + 2t) + 3t - 3(2 + 5t) = -14 - 8t,$$

Vilket ger $t = -2$ och därmed skärningspunkten $(-4 + 2(-2), 3(-2), 2 + 5(-2)) = (-8, -6, -8)$

Svar: i punkten $(-8, -6, -8)$

f) $f^{-1}(4)$ är lösningen till ekvationen $f(x) = 4$, dvs $\frac{x}{x-1} = 4$, som ger $x = 4/3$.

Svar: $f^{-1}(4) = 4/3$.

g) Derivering ger enligt kedjeregeln $f'(x) = \frac{1}{1 + (2x+1)^2} \cdot D(2x+1) = \frac{2}{1 + (2x+1)^2}$, eftersom $D(\arctan t) = 1/(1+t^2)$.

Med $x = -1$ får vi $f'(-1) = 2/2$.

Svar: 1

2. a) Gränsvärdet är av typen ” $\infty - \infty$ ”. Räkne regler för logaritmer ger

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x - 2) - 2 \ln x = \ln \left(\frac{3x^2 + 2x - 2}{x^2} \right).$$

Eftersom $(3x^2 - 2x - 2)/x^2 \rightarrow 3$, när $x \rightarrow \infty$ gäller att $f(x) \rightarrow \ln 3$ då.

Svar: $\ln 3$

- b) Gränsvärdet är av typen ” $0/0$ ”. Förlängning med täljarens konjugerade uttryck $\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{3x}$ ger

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{3x}}{x - 2} = \frac{x^2 + 2 - 3x}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{3x})} = \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{3x})} = \\ &= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{3x}}. \end{aligned}$$

Av detta följer att $f(x) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$, när $x \rightarrow 2$.

Svar: $\frac{1}{2\sqrt{6}}$

- c) Gränsvärdet är av typen ” $0/0$ ”. Vi sätter

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x \ln(1 + x^2) - \sin x + x}{\arctan x - x}.$$

Derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\ln(1 + x^2) + \frac{x \cdot 2x}{1+x^2} - \cos x + 1}{\frac{1}{1+x^2} - 1},$$

som efter förlänning med $1 + x^2$ blir

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{(1 + x^2) \ln(1 + x^2) + 2x^2 - (1 + x^2)(\cos x - 1)}{-x^2}$$

som också ger ett gränsvärde av typen ” $0/0$ ”, när $x \rightarrow 0$. Ytterligare derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{v'(x)} &= \frac{2x \ln(1 + x^2) + 2x + 4x - 2x(\cos x - 1) + (1 + x^2) \sin x}{-2x} = \\ &= -\ln(1 + x^2) - 3 + (\cos x - 1) - \frac{1 + x^2}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow \\ &\rightarrow -\ln(1) - 3 + (1 - 1) - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{7}{2}, \end{aligned}$$

när $x \rightarrow 0$. L'Hospitals regel ger nu att $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ och (sedan) $\frac{f(x)}{g(x)}$ också har detta gränsvärde.

Svar: $-7/2$

3. Funktionen f är definierad för alla reella tal och har derivata $g(x) = f'(x) = \frac{-12x}{(x^2 + 3)^2}$. Vi söker x så att $g(x)$ är maximalt. Vi har

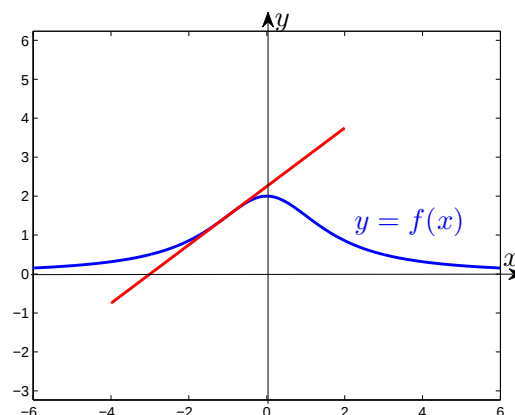
$$g'(x) = \frac{-12(x^2 + 3)^2 + 12x \cdot 2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^4} = \frac{-12(x^2 + 3) + 48x^2}{(x^2 + 3)^3} = \frac{36(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

Detta ger följande teckenstudium av $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	(0)

Eftersom $g(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$, drar vi av tabellen slutsatsen att den lokala maximipunkten $x = -1$ också är global maximipunkt, så den största lutningen på $y = f(x)$ har vi i punkten $(-1, \frac{3}{2})$.

Svar: största lutningen i punkten $(-1, \frac{3}{2})$.



4. Vår funktion $f(x) = e^{\frac{x}{(1-x)^3}}$ är definierad för alla reella x utom $x = 1$. Vi konstaterar först att vi har följande gränsvärden:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e^0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^{-\infty} = 0, \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow 1^-$$

Därför drar vi slutsatsen att linjerna $y = 1$ ($i \pm\infty$) och $x = 1$ ("från vänster") är asymptoter till $y = f(x)$.

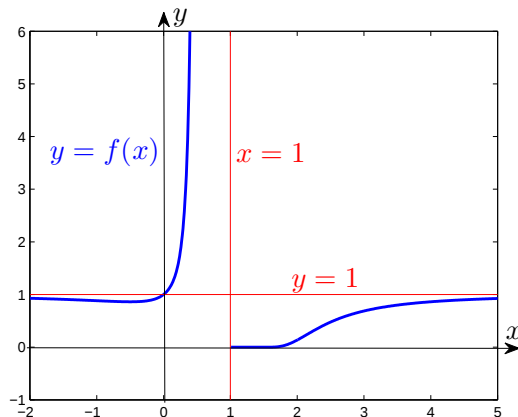
För att finna eventuella lokala extrempunkter deriverar vi:

$$f'(x) = e^{\frac{x}{(1-x)^3}} \frac{(1-x)^3 - x \cdot 3(1-x)^2(-1)}{(1-x)^6} = e^{\frac{x}{(1-x)^3}} \frac{(1-x) + 3x}{(1-x)^4} = e^{\frac{x}{(1-x)^3}} \frac{1+2x}{(1-x)^4}$$

Derivatans enda nollställe är alltså $x = -\frac{1}{2}$. För överblick och slutsatser gör vi en tabell:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		∞
$f'(x)$		-	0	+	odef	+	
$f(x)$	(1)	$\searrow$	$e^{-\frac{4}{27}}$	$\nearrow$	odef	$\nearrow$	(1)

Vi har alltså ett lokalt minimum i $x = -\frac{1}{2}$.



Svar: Asymptoter $y = 1$ och $x = 1$, lokalt minimum i $x = -\frac{1}{2}$.

5. Med figurens (nedan) beteckningar:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\text{lilla triangelns area}}{\text{stora triangelns area}} = \frac{\frac{c(H-h)}{2}}{\frac{CH}{2}} = \frac{c}{C} - \frac{c}{C} \frac{h}{H}$$

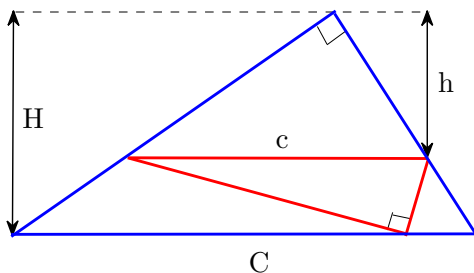
Likformighet mellan topptriangeln och stora triangeln ger:

$$\frac{h}{H} = \frac{c}{C}$$

Med $\frac{c}{C} = x$, $0 < x < 1$ (genom att välja exempel med sidan C obetydligt större än c och liggande nära c , respektive exempel med C mycket större än c , kan vi förstå att x verkligen kan anta alla värden i intervallet $(0, 1)$) har vi alltså

$$\frac{T_1}{T_2} = x - x^2 = f(x)$$

och $f'(x) = 1 - 2x$ med enda nollställe $x = 1/2$ och teckenväxling $+0-$, vilket ger lokalt maximum och största värde $= 1/4$ för $x = 1/2$. Detta innebär att minsta förhållandet mellan stora och lilla arean är 4 och antas då de parallella basernas förhållande är 2:1. Vi ser också hur ett sådant fall kan konstrueras: spegla lilla triangeln i c och konstruera den stora triangeln med den speglade triangeln som topptriangel - då blir $C=2c$ och $T_2 = 4T_1$.



Svar: minsta arean av den stora triangelns är 4 ggr arean av den lilla triangeln.

6. a) Om $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ och vinkeln mellan dem är $\frac{\pi}{6}$, så är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

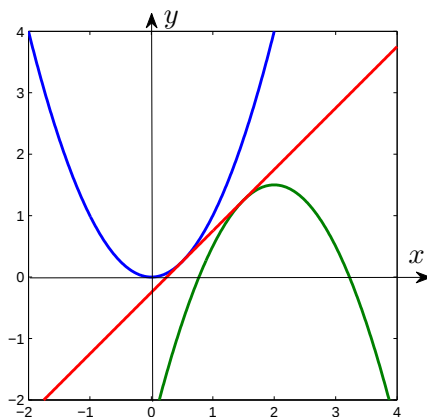
Svar: falskt

b) Vi kan se att $VL \leq 0$, $HL \geq 0$, så de är lika bara om de båda är noll (t ex då $x = 0$). Båda leden är definierade för exempelvis $x = \frac{\pi}{2}$, där är $VL = -1$ och $HL = 1$.

Svar: falskt

c) Vi söker vår linjes skärningspunkter med de två kurvorna. För den första kurvan får vi ekvationen $x^2 = x - \frac{1}{4} \iff (x - \frac{1}{2})^2 = 0$, alltså dubbelrot $x = \frac{1}{2}$. För den andra kurvan blir det $\frac{3}{2} - (x-2)^2 = x - \frac{1}{4} \iff (x - \frac{3}{2})^2 = 0$, alltså dubbelrot $x = \frac{3}{2}$. Att det blir dubbelrötter är ett bra tecken, men vi kontrollerar derivatorna i dessa skärningspunkter: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$, $f'(\frac{1}{2}) = 1$ och $g(x) = \frac{3}{2} - (x-2)^2 \Rightarrow g'(x) = -2(x-2)$, $g'(\frac{3}{2}) = 1$. I båda punkterna överensstämmer respektive funktions derivata med linjens riktningskoefficient. Detta visar att linjen tangerar båda punkterna i var sin punkt.

Svar: sant



7. Se kursboken.