

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från hösten 2012 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 21/1.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida

www.math.chalmers.se/Math/Grundtb/CTH/tmv125/1213/

/LF

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

a) För vilka reella tal x gäller det att $x < x^2 + 1$? (2p)

b) För vilket eller vilka värden på a är vektorn med koordinater $(1, a, 2)$ vinkelrät mot vektorn $(1, 2, 3) \times (1, a, 2)$? (2p)

c) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + ay = b \end{cases} \text{ får oändligt många lösningar?}$$

d) Bestäm $f'(\frac{1}{2})$ då $f(x) = \cos(\arctan 2x)$. (2p)

e) Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}$ (2p)

f) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2})$ (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller båda linjerna (4p)

$$(x, y, z) = (4 - t, 5 + t, 2t) \text{ och } (x, y, z) = (4 + t, 5 - 2t, t).$$

b) Bestäm konstanten a så att de två linjerna (4p)

$$(x, y, z) = (4 - t, 5 + t, 2t) \text{ och } (x, y, z) = (at, 1 + 2t, 2 - t)$$

skär varandra och ange skärningspunkten.

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$. (6p)

Ange alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

Du behöver inte utreda var kurvan är konvex/konkav.

Var god vänd!

4. Visa att funktionen $f(t) = \frac{\tan t}{2 + \tan^2 t}$ har ett största och ett minsta värde i intervallet $[0, \frac{\pi}{2})$, och beräkna dessa värden. (6p)

5. Låt $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{om } x < 0 \\ e^{-x^2} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$ (6p)

- a) Visa att f är inverterbar.
- b) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd.
- c) Ange funktionsuttrycket $f^{-1}(x)$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. (6p)
Svaren ska motiveras. Högst 2 poäng per fråga, bara svaret "sant" eller "falskt" ger ingen poäng.

- a) Om $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ så är $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$.
- b) Varje ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.
- c) Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) < g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så kan det aldrig vara så att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x . (2p)
b) Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ med hjälp av definitionen. (4p)