

1. Till denna uppgift skulle endast lämnas svar, men här ges kortfattade lösningar.

- a) För vilka reella tal x gäller det att $x < x^2 + 1$?

Lösning:

$$x < x^2 + 1 \iff x^2 - x + 1 > 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Vi ser att detta är sant för **alla reella x**.

- b) För vilket eller vilka värden på a är vektorn med koordinater $(1, a, 2)$ vinkelrät mot vektorn $(1, 2, 3) \times (1, a, 2)$?

Lösning: Eftersom vektorprodukten alltid är vinkelrät mot de ingående faktorerna (av vilka den ena är just $(1, a, 2)$), så gäller detta för **varje reellt värde på a**.

- c) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + ay = b \end{cases} \text{ får oändligt många lösningar?}$$

Lösning: Den utökade koefficientmatrisen undergår radoperationer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 3 - 2a & 1 - 2b \end{bmatrix}$$

För att få oändligt många lösningar, måste man ha färre pivotelement än antalet obekanta. Därigenom tvingas hela andra raden vara en nollrad, dvs $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{3}}{2}$, $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{2}$.

- d) Bestäm $f'(\frac{1}{2})$ då $f(x) = \cos(\arctan 2x)$.

Lösning: Kedjeregeln i två led ger

$$f'(x) = -\sin(\arctan 2x) \cdot \frac{2}{1 + (2x)^2}$$

och därmed är

$$f'(\frac{1}{2}) = -\sin(\arctan 1) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e) Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}$

Lösning: Högerledet förenklas:

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos \frac{2\pi i}{3} + i \sin \frac{2\pi i}{3} + \cos \frac{4\pi i}{3} + i \sin \frac{4\pi i}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1$$

Vi ska alltså lösa ekvationen $z^3 = -1$

$$\iff z^3 + 1 = 0 \iff (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$$

De två faktorernas nollställen är våra lösningar: $z = -1$, $z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \right)$

Lösning: Konjugatförlängning ger

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} &= \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}} = \\ &= \frac{1}{x^2\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2. a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller båda linjerna
 $(x, y, z) = (4 - t, 5 + t, 2t)$ och $(x, y, z) = (4 + t, 5 - 2t, t)$.

Lösning: Vi skriver om linjernas ekvationer något:

$$(x, y, z) = (4, 5, 0) + t(-1, 1, 2) \text{ och } (x, y, z) = (4, 5, 0) + t(1, -2, 1).$$

Båda linjerna går tydligen genom punkten $(4, 5, 0)$, och en normalvektor till det sökta planet måste vara vinkelrät mot linjernas rikningsvektorer. Normalvektorn kan därför tas som vektorprodukten av dessa:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ett plan genom $(4, 5, 0)$ med denna normalvektor har ekvationen

$$(5, 3, 1) \bullet (x - 4, y - 5, z - 0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{5x} + \mathbf{3y} + \mathbf{z} = \mathbf{35}$$

- b) Bestäm konstanten a så att de två linjerna
 $(x, y, z) = (4 - t, 5 + t, 2t)$ och $(x, y, z) = (at, 1 + 2t, 2 - t)$
skär varandra och ange skärningspunkten.

Lösning: Här måste vi hålla isär parametrarna i linjernas ekvationer

$$\text{och lösa ekvationssystemet } \begin{cases} 4 - s = at \\ 5 + s = 1 + 2t \\ 2s = 2 - t \end{cases}$$

Systemet av de två sista ekvationerna har den entydiga lösningen
 $s = 0, t = 2$. För att en lösning till hela systemet ska existera, måste
nu enligt första ekvationen $\mathbf{a} = \mathbf{2}$, och skärningspunkten blir $(\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{0})$.

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}$.
Ange alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
Du behöver inte utreda var kurvan är konvex/konkav.

Lösning: Funktionen f är tydligen definierad för alla reella x utom ± 1 .
Eftersom f är *jämn*, kan vi undersöka dess uppträdande för $x \geq 0$ och sedan utnyttja den jämna symmetrin.

Vi reder ut gränsvärdena då $x \rightarrow 1^\pm$ och då $x \rightarrow \infty$:

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow 1^-$$

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 1^+$$

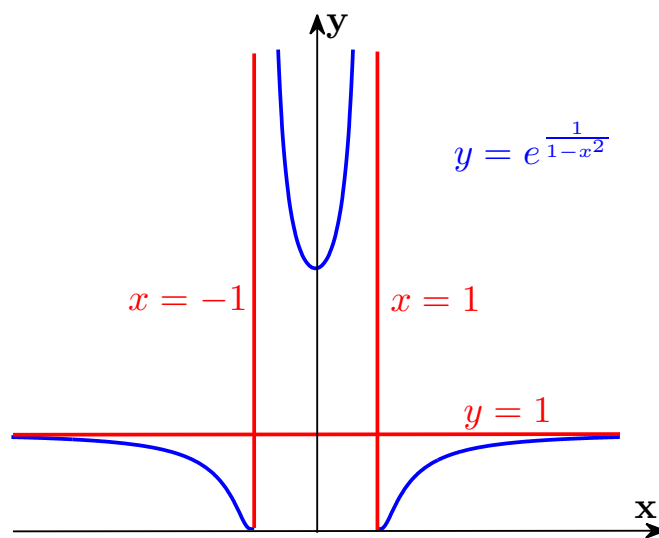
$$f(x) \rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow \infty$$

Nu återstår att avgöra funktionens växande/avtagande, vilket görs med derivatans hjälp:

$$f'(x) = e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$
 Derivatans är alltså noll i $x = 0$ och positiv för

$0 < x < 1$ och $x > 1$. Detta innebär att f är växande i de två angivna intervallen, och då f är jämn, innebär det också att f är avtagande i $x < -1$ och $-1 < x < 0$, samt har ett **lokalt minimum i $x = 0$** .

Asymptoter är linjerna $x = \pm 1$ och $y = 1$.



4. Visa att funktionen $f(t) = \frac{\tan t}{2 + \tan^2 t}$ har ett största och ett minsta värde i intervallet $[0, \frac{\pi}{2})$, och beräkna dessa värden.

Lösning: Sätt $x = \tan t$, då växer x från 0 mot ∞ då t växer från 0 mot $\frac{\pi}{2}$. Vi kan då lättare analysera $f(t) = g(x) = \frac{x}{2 + x^2}$. (Det går förstås bra att behålla variabeln t , men derivatan blir mera komplicerad.) Vi deriverar: $g'(x) = \frac{2 - x^2}{(2 + x^2)^2}$, och ser att derivatan är positiv då $0 \leq x < \sqrt{2}$, lika med noll för $x = \sqrt{2}$ och negativ för $\sqrt{2} < x < \infty$. Det betyder att $g(x)$ växer från $g(0) = 0$ till ett maximum $g(2) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ och därefter avtar mot noll då $x \rightarrow \infty$. I termer av $f(t)$ innebär detta att $f(t)$ växer från $f(0) = 0$ till $f(\arctan 2) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ och sedan avtar mot noll då $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
Minsta värdet är alltså 0, och största värdet är $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5. Låt $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{om } x < 0 \\ e^{-x^2} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$

a) Visa att f är inverterbar.

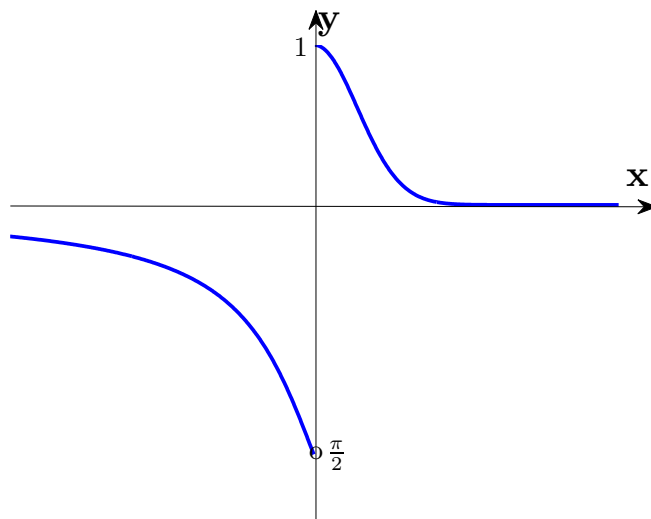
Lösning: Funktionen är definierad för alla reella x . Vi kontrollerar funktionens växande/avtagande med hjälp av derivatan:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(\frac{-1}{x^2} \right) = \frac{-1}{1+x^2} & \text{om } x < 0 \\ -2xe^{-x^2} & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

Derivatan existerar och är negativ, utom i $x = 0$ där den inte existerar. $f(x)$ är därmed avtagande för $x < 0$ och avtagande för $x > 0$. Vi tittar på gränsvärdena i $\pm\infty$ och $0^\pm$:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow -\infty \\ f(x) &\rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ då } x \rightarrow 0^- \\ f(x) &\rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow 0^+ \\ f(x) &\rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

En skiss av kurvan illustrerar situationen.



f avtar för negativa x mellan 0 och $-\frac{\pi}{2}$, och avtar för positiva x från 1 mot noll. Inget funktionsvärde antas mer än en gång. Då är funktionen injektiv och inverterbar från $\mathcal{V}_f$ till $\mathcal{D}_f$.

- b) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd.

Lösning: Av föregående studie ser vi att f :s värdemängd och därmed inversens definitionsmängd är $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, 1]$. Tidigare har vi konstaterat att f är definierad för hela $\mathbf{R}$, vilket därmed är inversens värdemängd.

- c) Ange funktionsuttrycket $f^{-1}(x)$.

Lösning: För att invertera $f(x)$ behöver vi lösa ut y ur

$$x = \begin{cases} \arctan \frac{1}{y} & \text{om } y < 0 \quad (-\frac{\pi}{2} < x < 0) \\ e^{-y^2} & \text{om } y \geq 0 \quad (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

Detta ger oss

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{om } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \sqrt{-\ln x} & \text{om } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. **Svaren ska motiveras.** Högst 2 poäng per fråga, bara svaret "sant" eller "falskt" ger ingen poäng.

a) Om $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ så är $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$.

Lösning: Att skalärprodukten är noll medför att vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är rät. Vi får

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \frac{\pi}{2})^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$$

så påståendet är **sant**.

- b) Varje ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.

Lösning: Detta är **falskt**, vilket följande exempel visar (det har en-tydig lösning $x = y = 1$):

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

- c) Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) < g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så kan det aldrig vara så att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

Lösning: Också detta påstående är **falskt**, ta t ex $f(x) = -e^{-x}$ och $g(x) = 0$, med $f'(x) = e^{-x}$ och $g'(x) = 0$. Här är $f(x) < g(x)$ och $f'(x) > g'(x)$ för alla reella x .