

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från hösten 2013 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 28/10.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/1314/

Examinator: Lennart Falk.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

- a) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases}$$
 får oändligt många lösningar? (2p)
- b) Funktionen $f(x) = e^x + \arctan x$ är inverterbar. Beräkna $(f^{-1})'(1)$. (2p)
- c) Bestäm *alla* komplexa lösningar till ekvationen $z^4 + 4 = 0$. (2p)
- d) Ange i vilket/vilka intervall som kurvan $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ är konkav (=concave down). (2p)
- e) Beräkna gränsvärdena: i) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-x^2}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2})$ (3p)
- f) Låt $f(x) = \cos x$, $\pi \leq x \leq 2\pi$. Inversen f^{-1} till denna strängt växande funktion är inte arcus cosinus, men kan uttryckas med hjälp av denna funktion. Gör detta! (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm en ekvation för det plan som går genom de tre punkterna $(1, -1, 0)$, $(-1, 3, 2)$ samt $(2, 5, 1)$. (4p)
- b) Bestäm konstanten a så att linjen med ekvationer (2p)

$$\frac{x-1}{a+1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1-a}$$

är parallell med planet i a).

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{x-1}$. Ange alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (6p)
- Du behöver inte utreda var kurvan är konvex/konkav.

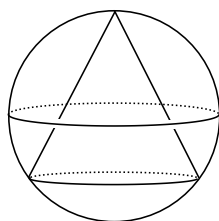
Var god vänd!

4. Utred antalet rötter till ekvationen (6p)

$$(x^2 - x + 1)e^x = K$$

för alla reella värden på konstanten K . Studera lämpligen grafen till funktionen given i vänsterledet!

5. En rät cirkulär kon (alltså en "vanlig" kon) är inskriven i en sfär med radie R , som i figuren. Vilken är den största möjliga volymen som konen kan ha? (Volymen av en kon ges av (basens area) $\times$ höjden/3.) (6p)



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. **Svaren ska motiveras.** Högst 2 poäng per fråga, bara svaret "sant" eller "falskt" ger ingen poäng. (6p)

- a) Funktionen $f(x) = \ln |\ln |x||$ är definierad för alla $x \neq 0$.
- b) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så gäller att $|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$.
- c) Det existerar ett tal $\delta > 0$ sådant att $|x| < \delta \Rightarrow |\sin x - x| < \frac{|x|}{1000000}$

7. a) Bevisa att om en deriverbar funktion definierad i intervallet (a, b) har ett maximum i en punkt $c \in (a, b)$, så är $f'(c) = 0$. (3p)
- b) Formulera medelvärdessatsen (med alla förutsättningar). (2p)
- c) Ett tal a kallas en *fixpunkt* till funktionen $f(x)$ om $f(a) = a$. Visa att om det för den deriverbara funktionen $f(x)$ gäller att $f'(x) \neq 1$ för alla x , så kan $f(x)$ ha *högst en* fixpunkt. (2p)