

1. Till denna uppgift skulle endast lämnas svar, men här ges kortfattade lösningar.

- a) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases} \text{ får oändligt många lösningar?}$$

Lösning:

Den utökade koefficientmatrisen övergår genom radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & a+4 & b-2 \end{bmatrix}$$

För att få oändligt många lösningar, måste man ha färre pivotelement än antalet obekanta. För att få lösbarhet kan vi inte ha något pivotelement i högerledskolonnen. Därigenom tvingas hela andra raden vara en nollrad, dvs $\mathbf{a} = -4$, $\mathbf{b} = 2$.

- b) Funktionen $f(x) = e^x + \arctan x$ är inverterbar. Beräkna $(f^{-1})'(1)$.

Lösning: Eftersom $f(0) = 1$, så har vi:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^x + \frac{1}{1+x^2}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

- c) Bestäm *alla* komplexa lösningar till ekvationen $z^4 + 4 = 0$.

Lösning:

Med $z = re^{i\theta}$ får vi $r^4 e^{i4\theta} = -4 = 4e^{i(\pi+n\cdot 2\pi)}$ och $r = 4^{1/4} = \sqrt{2}$,
 $\theta = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, 3$
 $n = 0$ ger $z = 1 + i$, av symmetri (regelbunden fyrhörning) får vi lätt resterande rötter.

Svar: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$

- d) Ange i vilket/vilka intervall som kurvan $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ är konkav (=concave down).

Lösning: Vi deriverar två ggr och får $y'' = (-1 + x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Kurvan är konkav då $y'' < 0$, vilket motsvarar att x tillhör intervallet $(-1, 1)$.

- e) Beräkna gränsvärdena: i) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-x^2}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2})$

Lösning: (i) Då $t = x - x^2 \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow \infty$, och då $e^t \rightarrow 0$ då $t \rightarrow -\infty$, så är gränsvärdet **0**.

(ii) Genom att faktorisera nämnaren och göra uttrycket liknämnt, ser vi lätt vad gränsvärdet blir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{1}{x-2} \rightarrow -1 \text{ då } x \rightarrow 1 \end{aligned}$$

- f) Låt $f(x) = \cos x$, $\pi \leq x \leq 2\pi$. Inversen f^{-1} till denna strängt växande funktion är inte arcus cosinus, men kan uttryckas med hjälp av denna funktion. Gör detta!

Lösning: Att invertera innebär att vi löser ut x som funktion av y ur vårt funktionsuttryck:

$$y = \cos x, \pi \leq x \leq 2\pi \iff x = \pm \arccos y + n \cdot 2\pi$$

Det enda val som ger $\pi \leq x \leq 2\pi$ är minustecken kombinerat med $n = 1$. Alltså har vi $f^{-1}(y) = -\arccos y + 2\pi$, eller med omkastade variabelnamn:

$$\mathbf{f^{-1}(x) = 2\pi - \arccos x.}$$

2. a) Bestäm en ekvation för det plan som går genom de tre punkterna $(1, -1, 0)$, $(-1, 3, 2)$ samt $(2, 5, 1)$.

Lösning: En normal till planet ges (t.ex) av $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ där $\mathbf{u} = \vec{AB}$ och $\mathbf{v} = \vec{AC}$ om vi sätter $A = (1, -1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ och $C = (2, 5, 1)$. Detta ger

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Vi väljer normalen $\mathbf{n}$ som är $-1/4$ gånger denna vektor och får att planet har ekvationen $2x - y + 4z = d$. Eftersom det går genom A har vi $2 + 1 = d$.

Svar: $2x - y + 4z = 3$.

- b) Bestäm konstanten a så att linjen med ekvationer

$$\frac{x-1}{a+1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1-a}$$

är parallell med planet i a).

Lösning: Vi parametriserar linjen genom att uttrycka x , y och z med hjälp av t utgående från

$$t = \frac{x-1}{a+1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1-a}.$$

Detta ger

$$\begin{cases} x = 1 + (a+1)t \\ y = 2t \\ z = 1 + (1-a)t \end{cases}$$

så linjen har riktningsvektorn

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}.$$

För att linjen ska vara parallell med planet krävs att $\mathbf{w}$ och $\mathbf{n}$ är vinkelräta, vilket ger ekvationen $0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 2(a+1) - 2 + 4(1-a)$, dvs $0 = -2a + 4$ eller $\mathbf{a} = \mathbf{2}$.

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{x - 1}$. Ange alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
Du behöver inte utreda var kurvan är konvex/konkav.

Lösning: Vi börjar med att konstatera att $f(x)$ är definierad för all $x \neq 1$. Vi söker asymptoter: Då $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow 1^-$ och $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 1^+$, kan vi dra slutsatsen att linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot - den enda.

Vi letar sneda/vågräta asymptoter.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x(x-1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x(x-1)} = 1$$

Om asymptoter $y = kx + m$ finns i $x = \pm\infty$, så är de alltså sneda med $k = 1$. Vi undersöker vidare:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x-1} = -1$$

Härav ser vi att det finns en asymptot $y = x + 3$ då $x \rightarrow -\infty$, och en annan asymptot $y = x - 1$ då $x \rightarrow +\infty$. Vi letar nu lokala extrempunkter. Vi konstaterar att f saknar derivata då $x = 0$ (intressant punkt därför!), att derivatan är

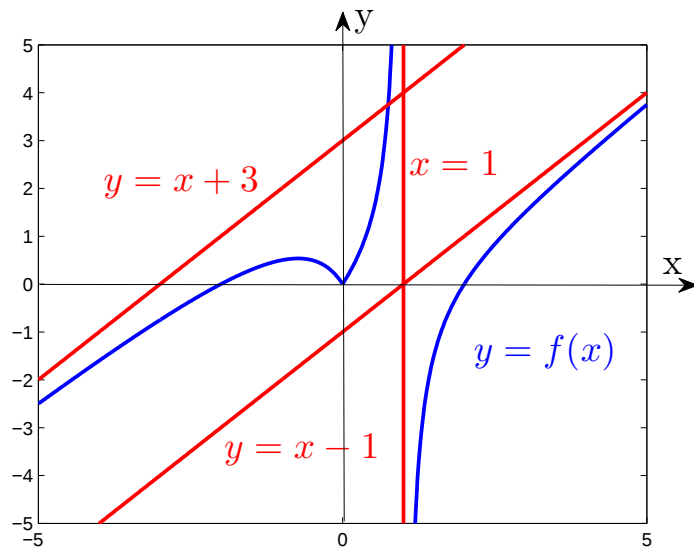
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} \text{ för } x < 0$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2} \text{ för } x > 0$$

Det senare uttrycket är alltid > 0 , men för negativa x har vi ett nollställe $x = 1 - \sqrt{3}$. Vi sammanställer fynden i en teckentabell.

x	$-\infty$		$1 - \sqrt{3}$		0		1		∞
$f'(x)$	1	+	0	-	odef	+	odef	+	1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$4 - 2\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	odef	$\nearrow$	∞

Vi ser också att funktionens nollställan är $x = \pm 2$, vilket har underordnad betydelse för konstruktionen. Tabellen visar i alla fall att det finns ett lokalt maximum i $x = 1 - \sqrt{3}$ (stationär punkt) och ett lokalt minimum i $x = 0$ (singulär punkt). Med stöd av tabellen, ritas grafen (nästa sida):



4. Utred antalet rötter till ekvationen

$$(x^2 - x + 1)e^x = K$$

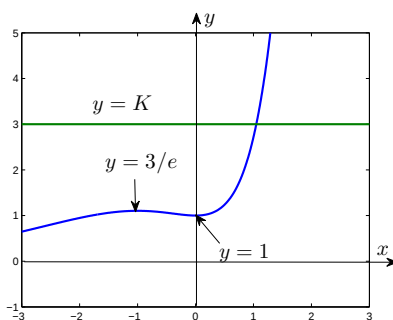
för alla reella värden på konstanten K . Studera lämpligen grafen till funktionen given i vänsterledet!

Lösning: Sätt $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$. Vi behöver veta hur $f(x)$ varierar, och deriverar därför:

$$f'(x) = (x^2 + x)e^x$$

Derivatan har nollställena $x = -1$ och $x = 0$, $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow +\infty$.

x	$-\infty$		-1		0		∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞



Vi vet att varje värde > 0 antas, men aldrig värdet 0. Vi tänker oss att vi drar linjen $y = K$ i vår figur, och räknar antalet skärningspunkter med $y = f(x)$. Dessa motsvarar ju rötterna till vår ekvation $f(x) = K$. Vi ser då:

För $-\infty < K \leq 0$: 0 rötter

För $0 < K < 1$: 1 rot

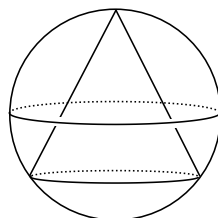
För $K = 1$: 2 rötter

För $1 < K < 3/e$: 3 rötter

För $K = 3/e$: 2 rötter

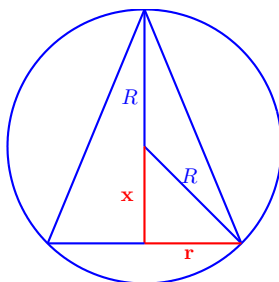
För $3/e < K < \infty$: 1 rot

5. En rät cirkulär kon (alltså en “vanlig” kon) är inskriven i en sfär med radie R , som i figuren. Vilken är den största möjliga volymen som konen kan ha? (Volymen av en kon ges av (basens area) $\times$ höjden/3.)



Lösning:

Sätt konens höjd till $H = R + x$ (se figuren), där R är sfärens radie.



Radien i konens basyta beräknas med Pythagoras sats till $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Vi kan nu teckna konens volym som funktion av x :

$$V(x) = \frac{BH}{3} = \frac{\pi r^2(R+x)}{3} = \frac{\pi(R^2 - x^2)(R+x)}{3} = \frac{\pi}{3}(R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3)$$

Denna volym ska maximeras då $0 \leq x \leq R$. Vi tar reda på derivatans nollställen:

$$v'(x) = 0 \iff R^2 - 2Rx - 3x^2 = 0 \iff x^2 + \frac{2R}{3}x - \frac{R^2}{3} = 0$$

Enda nollstället i det aktuella intervallet är $x = \frac{R}{3}$. Att detta är ett lokalt maximum (och därmed maximum över $[0, R]$) kan man t ex se med andraderivatan $V''(x) = \frac{\pi}{3}(-2R - 6x)$, som är negativ i punkten. Vi har därmed största möjliga värdet av volymen:

$$V\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{\pi(R^2 - (\frac{R}{3})^2)(R + \frac{R}{3})}{3} = \frac{32\pi R^3}{81}$$

(vilket utgör $8/27$ av klotets volym).

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska.

a) Funktionen $f(x) = \ln |\ln |x||$ är definierad för alla $x \neq 0$.

Lösning: Påståendet är **falskt**, eftersom $\ln |1| = 0$, och logaritmen (yttre funktionen här) ej är definierad för 0. $f(x)$ är ej definierat för $x = 1$.

b) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så gäller att $|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$.

Lösning: Detta är **sant**, eftersom om vinkeln mellan vektorerna är α , så är

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha)^2 + (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha)^2 = \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cdot 1 \end{aligned}$$

c) Det existerar ett tal $\delta > 0$ sådant att $|x| < \delta \Rightarrow |\sin x - x| < \frac{|x|}{1000000}$

Lösning: Olikheten kan, efter division med $|x|$, skrivas:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \frac{1}{1000000}$$

Det faktum att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ innebär just att till varje $\epsilon > 0$ (t ex $\epsilon = 10^{-6}$) finns ett $\delta > 0$ så att $|x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \epsilon$, dvs $|x| < \delta \Rightarrow |\sin x - x| < \epsilon |x|$. Påståendet är **sant**.

7. a) Bevisa att om en deriverbar funktion definierad i intervallet (a, b) har ett maximum i en punkt $c \in (a, b)$, så är $f'(c) = 0$.
- b) Formulera medelvärdessatsen (med alla förutsättningar).
- c) Ett tal a kallas en *fixpunkt* till funktionen $f(x)$ om $f(a) = a$. Visa att om det för den deriverbara funktionen $f(x)$ gäller att $f'(x) \neq 1$ för alla x , så kan $f(x)$ ha *högst en* fixpunkt.

Lösning: För (a) och (b), se läroboken! Här är en lösning till (c).

Antag att f uppfyller de givna förutsättningarna (deriverbar, $f'(x) \neq 1$ för alla x), men har mer än en fixpunkt. Antag då att x_1 och x_2 är två fixpunkter, $x_1 < x_2$. Vi kan då använda medelvärdessatsen på intervallet $[x_1, x_2]$. Det ger att det finns en punkt $c \in (x_1, x_2)$ så att

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Eftersom $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$, så får vi $f'(c) = 1$. Detta motsäger vårt antagande om att derivatan aldrig är 1, och visar att det inte kan finnas mer än en fixpunkt.