MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för V1 och AT1, (TMV125)

---

1. Till denna uppgift skulle endast svar, inte lösningar lämnas in. Här kommer i alla fall korta lösningar.

   a)
$$\frac{(u^{1/2})^{1/5}(u^{-1/5})^2}{(u^{1/4})^2(u^{2/5})^{1/4}} = \frac{u^{1/10}u^{-2/5}}{u^{1/2}u^{1/10}} = u^{-2/5-1/2} = \mathbf{u^{-\frac{9}{10}}}$$

   b) Den utökade koefficientmatrisen för systemet övergår genom radoperationer till trappstegsform:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 3-2a & 1-2b \end{bmatrix}$$
   Lösning saknas om vi har ett pivotelement i högerledet, vilket innebär att $\mathbf{a} = \mathbf{\frac{3}{2}}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{\frac{1}{2}}$.

   c) Vi deriverar:
$$g'(x) = \frac{f'(x)\sqrt{x} - f(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2xf'(x) - f(x)}{2x\sqrt{x}},$$
   sätter in $x = 4$, $f(4) = -8$, $f'(4) = 1$ och får $\mathbf{g'(4) = 1}$.

   d) Lös ut x ur $y = \dfrac{2-3x}{x+4}$, eller för att få ”rätt” bokstav, lös ut y ur $x = \dfrac{2-3y}{y+4}$. Vi får $x(y+4) = 2-3y \iff y(x+3) = 2-4x$ och därmed $\mathbf{f^{-1}(x)} = \mathbf{\dfrac{2-4x}{x+3}}$

   e) Kvadratkomplettera:
$$x^2 - 2x + y^2 + 10y = -23 \iff (x-1)^2 + (y+5)^2 = -23 + 1^2 + 5^2 = 3$$
   Nu känner vi igen ekvationen för en cirkel med medelpunkten $(\mathbf{1}, \mathbf{-5})$ och radien $\sqrt{\mathbf{3}}$.

---

f) Funktionen $f(x) = \sqrt{(1-x)(x+5)}$ är definierad i intervallet $[-5, 1]$ och har derivatan

$$f'(x) = \frac{-(x+5)+(1-x)}{2\sqrt{(1-x)(x+5)}} = \frac{-(x+2)}{\sqrt{(1-x)(x+5)}}$$

Härav ser vi att derivatan är positiv för $x < -2$, negativ för $x > -2$. Tittar vi på definitionsmängden, så vet vi då att f är strängt växande i intervallet $[\mathbf{-5}, \mathbf{-2}]$.

2. a) Det plan som går genom punkten $(-2, 0, 3)$ och är vinkelrätt mot linjen som ges av

$$\frac{x-2}{2} = 7 + y = \frac{z+6}{-3}.$$

har som normalvektor varje riktningsvektor för linjen. En sådan avläser vi ur linjens ekvationer (nämnarna): $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Planet har då en ekvation av typen $2x + y - 3z = D$. Insättning av den kända punkten $(-2, 0, 3)$ ger oss $D = -13$. Planet har alltså ekvationen $\mathbf{2x + y - 3z = -13}$.

b) Vi skriver om linjens ekvationer i parameterform: $(x, y, z) = 2+2t, -7+t, -6-3t$. Om vi sätter in dessa parameteruttryck i planets ekvation, så kan vi bestämma t för den punkt på linjen som också ligger i planet:

$$2(2+2t)+(-7+t)-3(-6-3t) = -13 \iff 14t+15 = -13 \iff t = -2$$

Detta ger i linjeens ekvationer vår skärningspunkt $(\mathbf{-2}, \mathbf{-9}, \mathbf{0})$.

MATEMATIK
Chalmers

---

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \Big(\text{för } x>0 \text{ är } x=\sqrt{x^2}\Big) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$

$= \dfrac{1+0}{\sqrt{1+0}} = \mathbf{1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+\ln x)}{\ln x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+\ln x)}{2\ln x}$

Med $t=\ln x$ gäller att $t\to 0$ då $x\to 1$.

Gränsvärdet kan då skrivas om som ett känt gränsvärde:

$\dfrac{1}{2} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

4. a) Funktionen $f(x) = e^{-x^2}\sqrt{4x^2+1}$ är en jämn funktion definierad för alla reella x. Med $t = x^2$ kan vi skriva $f(x) = \dfrac{\sqrt{4t+1}}{e^t}$, så vi ser att $f(x) \to 0$ då $t \to \infty$, dvs då $x \to \pm\infty$. Därmed är $y = 0$ asymptot till grafen, både i ∞ och ∞. Då funktionen är definierad i alla reella x, finns inga lodräta asymptoter.

Vi deriverar funktionen:

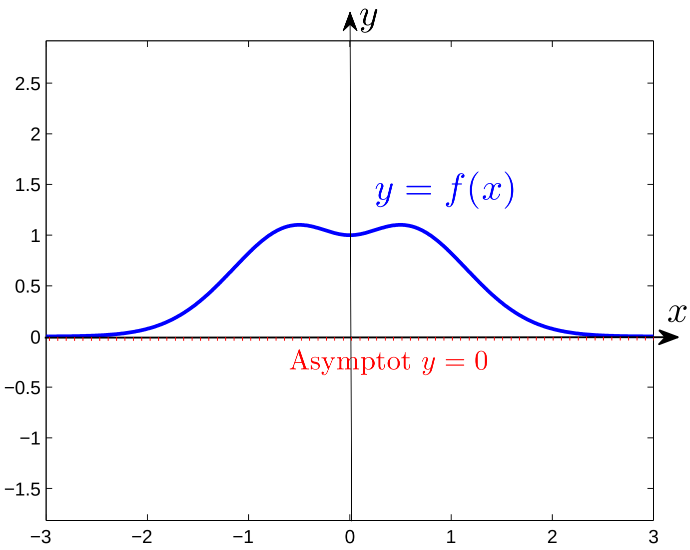
$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x)\sqrt{4x^2+1} + e^{-x^2}\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = \frac{-2x(4x^2+1)+4x}{e^{x^2}\sqrt{4x^2+1}} =$$

$$= \frac{2x(1-4x^2)}{e^{x^2}\sqrt{4x^2+1}}$$

Derivatans nollställen är tydligen $x = 0$ och $x = \pm\frac{1}{2}$. En teckentabell ger oss en översikt:

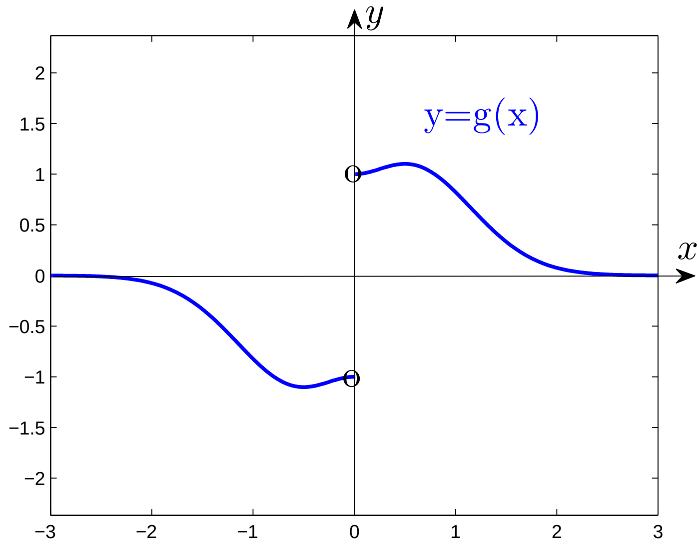
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}e^{-1/4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}e^{-1/4}$	$\searrow$	0

Vi kan nu rita grafen.



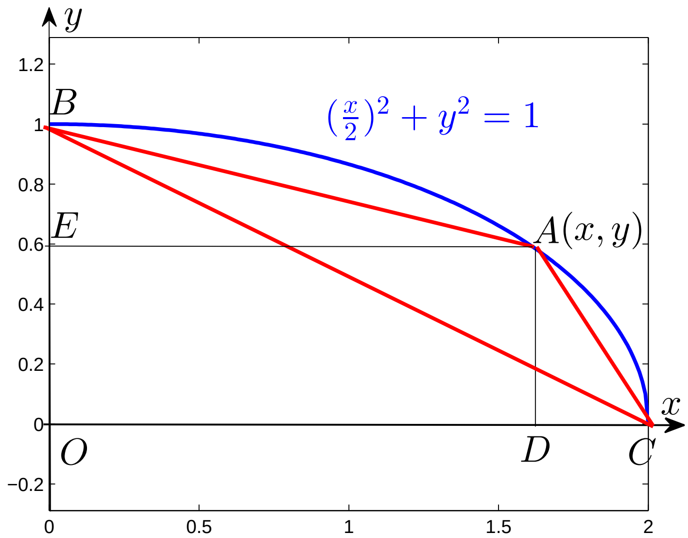
Vi kan av ovanstående dra slutsatserna:
Värdemängd: $(0, \sqrt{2}e^{-1/4}]$**, lokala maximipunkter** $x = \pm\frac{1}{2}$**, lokal minimipunkt** $x = 0$**, asymptot** $y = 0$.

b) Funktionen $g(x) = xe^{-x^2}\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}$ sammanfaller för $x > 0$ med $f(x)$ i (a)-uppgiften, eftersom $x = \sqrt{x^2}$ kan multipliceras in i rotuttrycket och ge $g(x) = e^{-x^2}\sqrt{4x^2+1}$. Med $x < 0$ är ju $x = -\sqrt{x^2}$, så vi får $g(x) = -e^{-x^2}\sqrt{4x^2+1}$. $g(x)$ är inte definierad för $x = 0$. Vi får en udda funktion med graf enligt nedan (begärdes inte, men är ju upplysande).



Värdemängden blir nu unionen av två separata intervall:
$\mathbf{V_g} = [-\sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{-\mathbf{1/4}}, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{-\mathbf{1/4}}]$.

5. Vi vill teckna arean av den röda triangeln i figuren, där ytterligare tre punkter har betecknats D, E, O. Låt A ha koordinaterna (x, y).



Vi har nu arean $f(x) =$ area(ADOE)+area(ABE)+area(ACD)-area(BCO) $= xy + \frac{x(1-y)}{2} + \frac{y(2-x)}{2} - \frac{2\cdot 1}{2} = \frac{x}{2} + y - 1$.
Vi löser ut y ur ellipsens ekvation och får

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - 1, \ 0 \le x \le 2$$

Vi deriverar:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

Nollställen söks:

$$f'(x) = 0 \iff \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} \iff 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4},\ x \ge 0 \iff x = \sqrt{2}$$

Derivatans teckenväxling kring nollstället är $+\ 0\ -$, så det rör sig om ett maximum, för övrigt är ju arean noll då $x = 0$ eller $x = 2$.

Största arean är $\mathbf{f}(\sqrt{\mathbf{2}}) = \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$.

MATEMATIK
Chalmers

---

6. a) SANT.
"Funktionen $f(x) = x \arctan(x)$ är konvex på intervallet $(-\infty, \infty)''$.
Vi beräknar andraderivatan:

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

Eftersom $f''(x) > 0$ för alla reella x, så är $f(x)$ (strängt) konvex i hela $(-\infty, \infty)$.

b) FALSKT.
"$\arcsin(\sin x) = x$ för alla $x \in \boldsymbol{R}$".
T. ex: $x = \pi$ ger $\arcsin(\sin x) = \arcsin 0 = 0 \neq x$.

c) SANT.
"Om $z^3 + 3z^2 + 3z = 7$, så måste $|z+1| = 2$."

$$z^3 + 3z^2 + 3z = 7 \;\Rightarrow\; z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8 \quad\Longleftrightarrow\quad (z+1)^3 = 8$$

Härav ser vi att $|z+1|^3 = 8$, varav följer att $|z+1| = 2$.

7. Se Adams!