

Kortfattade lösningar till tentan TMV125 2014-08-27

1. (a) $\ln(\ln x) = 1 \iff \ln x = e \iff \mathbf{x = e^e}$.
- (b) Då täljaren är $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ är positiv för alla reella x , så beror kvotens tecken bara på nämnaren. Detta ger lösningen $\mathbf{x < -1}$.
- (c)
$$\frac{(1 - \sqrt{3}i)^9(1+i)^{12}}{(2i)^{13}} = \frac{(2e^{-i\frac{\pi}{3}})^9(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{12}}{2^{13} \cdot i^{12}i} = \frac{2^9 e^{-9\pi i} 2^6 e^{9\pi i}}{2^{13}i} = \frac{2^2}{i} = \mathbf{-4i}$$
.
- (d) Minsta värdet noll antas då $\cos x = n\pi$, n heltal. Denna ekvation har lösning bara om $n = 0$. Då är lösningarna $\mathbf{x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}}$.
- (e) Den utökade koefficientmatrisen för systemet övergår genom radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 2 & a^2 & 6 \\ 1 & 2 & a+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a^2-4 & 4-2a \end{bmatrix}$$

Lösning saknas om vi har ett pivotelement i högerledet, vilket innebär att $a^2 - 4 = 0$, $4 - 2a \neq 0$. detta gäller bara om $\mathbf{a = -2}$.

(f)

$$\frac{\sqrt{2 - \frac{\cos x}{2}} - \sqrt{1 + \frac{\cos x}{2}}}{x^2} = \text{konjugatförlängning} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{\cos x}{2}} + \sqrt{1 + \frac{\cos x}{2}}}$$

Den andra kvoten går lugnt och stilla mot $\frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Den första kvoten kan vi behandla med konjugatförlängning eller med l'Hôpitals regel:

$$u(x) = 1 - \cos x, v(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = \sin x, v'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Hela uttrycket har därmed gränsvärdet $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

2. (a) L kan uttryckas i parameterform:

$$t = x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{3} \iff x = 1 + t, y = 2t, z = 1 - 3t$$

Skärningspunkten ges av ekvationssystemet av linjens och planets ekvationer. Parametern t för skärningspunkten kan vi få genom att sätta in uttrycken för x, y, z i planets ekvation:

$$(1+t) - 2 \cdot 2t - 2(1-3t) = 5 \Rightarrow t = 2$$

som ger skärningspunkten $x = 1 + 2 = 3$, $y = 2 \cdot 2 = 4$, $z = 1 - 3 \cdot 2 = -5$, alltså punkten $\mathbf{(3, 4, -5)}$.

- (b) Ur ekvationerna för L får vi en vektor längs L : $\mathbf{v = (1, 2, -3)^T}$. Den ligger i (är parallell med) det sökta planet. Om vårt plan ska vara vinkelrätt med planet P , så ska normalvektorn $\mathbf{u = (1, -2, -2)^T}$ (ur planets ekvation) också ligga i vårt nya plan. En normalvektor till planet måste vara vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, och kan därför väljas som $\mathbf{u \times v = (10, 1, 4)^T}$. Vårt plan har därmed en ekvation av typen $10x + y + 2z = D$, insättning av en punkt i planet, t. ex. $(1, 0, 1)$ på linjen L ger oss $D = 14$.
Planet är $\mathbf{10x + y + 4z = 14}$.

3. Eftersom $x^2 + 8x + 18 = (x+4)^2 + 2 > 0$, så är rotuttrycket definierat för alla reella x , och bara nämnaren inskränker **definitionsområdet**: $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^-$, och $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow 0^+$. y-axeln $x = 0$ är **lodrät asymptot**.

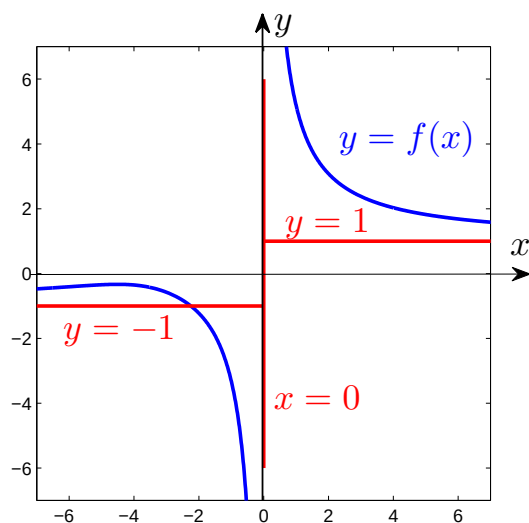
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{8}{x} + \frac{18}{x^2})}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{18}{x^2}}}{x} \rightarrow \begin{cases} -1 & \text{då } x \rightarrow -\infty \\ 1 & \text{då } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Härav ser vi att $y = -1$ och $y = 1$ är **vågräta asymptoter**.

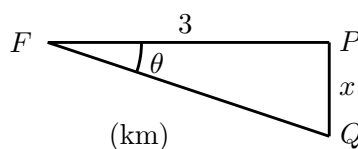
Lokala extrempunkter? Derivera funktionen:

$$f'(x) = \frac{\frac{x(x+4)}{\sqrt{x^2+8x+18}} - \sqrt{x^2+8x+18}}{x^2} = \frac{-4x-18}{x^2\sqrt{x^2+8x+18}}$$

Derivatans enda nollställe är $x = -\frac{9}{2}$, teckenväxlingen för f' kring denna punkt är $+0-$, vilket betyder att vi har ett **lokalt maximum** i $x = -\frac{9}{2}$ med $f(x = -\frac{9}{2}) = -\frac{1}{3}$. **Värdemängden** är nu också bestämd: $V_f = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup (1, \infty)$. Vi kan nu rita grafen:



4. Om fyren befinner sig i F , så har vi en rätvinklig triangel FPQ , där vinkeln vid P är den räta. $FP = 3$ och $PQ = 1$ i enheten km. Om vi kallar avståndet från P till en punkt på stranden i riktning mot Q för x , så är det $\frac{dx}{dt}|_{x=1}$ som uttrycker den sökta hastigheten hos ljuskäglan. Vinkeln mellan ljusstrålen och linjen FP kallar vi för θ . Figuren visar läget då $x = 1$.



Den hastighet vi känner, är vinkelhastigheten hos ljuskäglan: $\frac{d\theta}{dt} = 8\pi$ radianer/minut (=4 varv/minut).

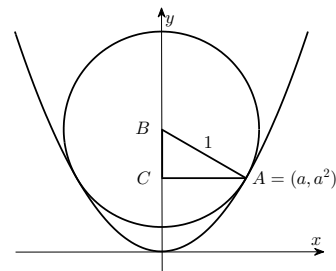
Enligt kedjeregeln gäller $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 8\pi$, så vi behöver x som funktion av θ . I den rätvinkliga triangeln ser vi att $x = 3 \tan \theta$, så

$$\frac{dx}{dt} = 3(1 + \tan^2 \theta) \cdot 8\pi = (1 + (\frac{1}{3})^2) \cdot 8\pi = \frac{80\pi}{3}$$

Hastigheten i Q är därmed $\frac{80\pi}{3}$ **km/min**. Räknar man i SI-enheter får man istället $\frac{4000\pi}{9} \approx 1400$ m/s.

5. Låt $A = (a, a^2)$ vara den punkt i första kvadranten på parabeln där den tangeras av cirkeln, och låt $B = (0, b)$ vara cirkelns medelpunkt (av symmetriskäl belägen på y-axeln). Riktningskoefficienten för linjen genom dessa punkter ges dels av punkternas koordinater, dels av att den är normal till parabeln:

$$\begin{cases} k &= \frac{b-a^2}{0-a} \\ k &= -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{2a} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{2} + a^2$$



Om $C = (0, a^2)$ så är triangeln ABC rätvinklig, sidlängderna är $AC = a$, $BC = \frac{1}{2}$, $AB = 1$, och Pythagoras sats ger då

$$a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1, \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathbf{b = \frac{5}{4}}$$

6. (a) Om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, och om vinkeln mellan vektorerna är α , så har vi:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha = 0, \text{ och } |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha = 0$$

men sådana α finns inte. Alltså är någon av vektorerna nollvektorn.

Sant.

- (b) Med $a = 1$ skulle vi ha $\ln(1 + b) = \ln 1 + \ln b = \ln b$, vilket är falskt för varje b då $\ln$ -funktionen är strängt växande.

Falskt.

- (c) Med $x = \pi$ har vi $\arcsin(\sin x) = \arcsin 0 = 0 \neq x$.

Falskt.

7. Se läroboken!