MATEMATIK
Chalmers

Lösningar till tentan för TMV125 2014-10-30

---

1. Till denna uppgift skulle endast svar, inte lösningar lämnas in. Här kommer i alla fall korta lösningar.

a) Den utökade koefficientmatrisen för systemet övergår genom radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ur detta får vi lösningarna. **Svar:** $\mathbf{x = -1 - t,\ y = 2 + t,\ z = t}$

b) Eftersom $f(x) = e^{\sin x \cos x} = e^{\frac{\sin 2x}{2}}$, sinusfunktionen har värdemängden $[-1, 1]$ och exponentialfunktionen är kontinuerlig, så gäller (satsen om mellanliggande värden):
Svar: $\mathcal{V}_\mathbf{f} = [\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}}, \mathbf{e}^{\frac{1}{2}}]$

c) Lös ut x ur ekvationen $y = f(x)$. Vi får då $x = \frac{5y+3}{5y+1}$, om vi presenterar inversen som funktion av x, har vi **Svar:** $\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{5x+1}}$

d) Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx} f(\sqrt{36 - 5x^2})|_{x=2} = f'(\sqrt{36 - 5x^2}) \frac{d}{dx} \sqrt{36 - 5x^2}|_{x=2} =$$

$$f'(\sqrt{36 - 5x^2}) \frac{-5x}{\sqrt{36 - 5x^2}}|_{x=2} = f'(4) \frac{-10}{4} = -10$$

Svar: $\mathbf{-10}$

e) (α) Med $f(x) = e^{x^2} - 1$ och $g(x) = \cos x - 1$ har vi både $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ då $x \to 0$, så vi kan använda l´Hôpitals regel.
$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{-\sin x} = -2 \frac{e^{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} \to -2 \frac{1}{1} = -2$ då $x \to 0$. Enligt l'Hôpitals regel har den ursprungliga kvoten samma gränsvärde. **Svar:** $\mathbf{-2}$

(β) $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} = \left(\left(1 + \frac{-2}{x}\right)^x\right)^3 \to (e^{-2})^3 = e^{-6}$ **Svar:** $\mathbf{e^{-6}}$

f) Ekvationen $y \cos x = 1 + \sin(xy)$ deriveras implicit:
$y' \cos x - y \sin x = \cos(xy)(y + xy')$
Sätt in $x = 0$, $y = 1$ och lös ut $y'(0) = 1$. Tangentens ekvation: $y - y(0) = y'(0)(x - 0) \iff y - 1 = x$ **Svar:** $\mathbf{y = x + 1}$

---

2. a) Arean av triangeln ABC är $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ (halva parallellogrammen). Vi har nu $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$,
$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 5\sqrt{2}$.

Svar: Arean är $\mathbf{\frac{5}{2}\sqrt{2}}$

b) Tetraederns höjd från hörnet D är detsamma som avståndet från D till planet genom A, B, C. Eftersom vektorn $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{5}\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en normalvektor till detta plan, så är avståndet d från D detsamma som längden av den ortogonala projektionen av $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ på $\boldsymbol{n}$. Därmed: $d = \dfrac{|\boldsymbol{n} \bullet \vec{AD}|}{|\boldsymbol{n}|} =$

$$\frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Svar: Höjden är $\mathbf{2\sqrt{2}}$

Alternativ lösningsmetod: beräkna volymen V av den "låda" som spänns upp av vektorerna $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$. V är absolutbeloppet av determinanten av den matris som har de tre vektorerna som kolonner (eller rader). Denna volym är också produkten av den sökta höjden h och arean A av parallellogrammen i (a). Alltså: $h = \frac{V}{A}$.

c) Eftersom $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en normalvektor till planet, kan dess ekvation skrivas $-1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = D$. Sätt in en av planets punkter, t. ex. A och se att $D = 1$.

Svar: planet har ekvationen $\mathbf{-x + z = 1}$

MATEMATIK
Chalmers

---

3. Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln x + \arctan x$$

är definierad för alla $x > 0$. Dess derivata är

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^3+x-2}{2x^2(x^2+1)} = \frac{(x-1)((x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4})}{2x^2(x^2+1)}$$

Derivatans enda nollställe är $x = 1$ där dess teckenväxling är $-0+$, så $x = 1$ är ett lokalt minimum med $f(1) = 1 + \arctan 1 = 1 + \frac{\pi}{2}$. Eftersom f är kontinuerlig och $f(x) \to \infty$ både då $x \to 0^+$ och då $x \to \infty$, så ser vi att $f(x)$ antar alla värden $\geq 1 + \frac{\pi}{2}$.

Svar: $\mathcal{D}_{\mathbf{f}} = (\mathbf{0}, \infty),\ \mathcal{V}_{\mathbf{f}} = [\mathbf{1} + \frac{\pi}{\mathbf{4}}, \infty)$

4. f är definierad då $x^2-3>0$, dvs då $x<-\sqrt{3}$ eller $x>\sqrt{3}$. Möjliga lodräta asymptoter är $x=\pm\sqrt{3}$. Eftersom $f(x)\to\infty$ då $x\to-\sqrt{3}^-$ och då $x\to\sqrt{3}^+$ så är de asymptoter.

Eftersom $f(x)$ uppenbarligen går mot ∞ då $x\to\infty$, och eftersom $f(x)=x(1+\frac{\ln(x^2-3)}{x})\to-\infty\cdot 1$ då $x\to-\infty$, så finns inga vågräta asymptoter. Kan det finnas sneda?

$\frac{f(x)}{x}=1+\frac{\ln(x^2-3)}{x}\to 1$ då $x\to\pm\infty$, eventuellt $k=1$

$f(x)-x=\ln(x^2-3)\to\infty$ då $x\to\infty$. Alltså inga sneda asymptoter heller.

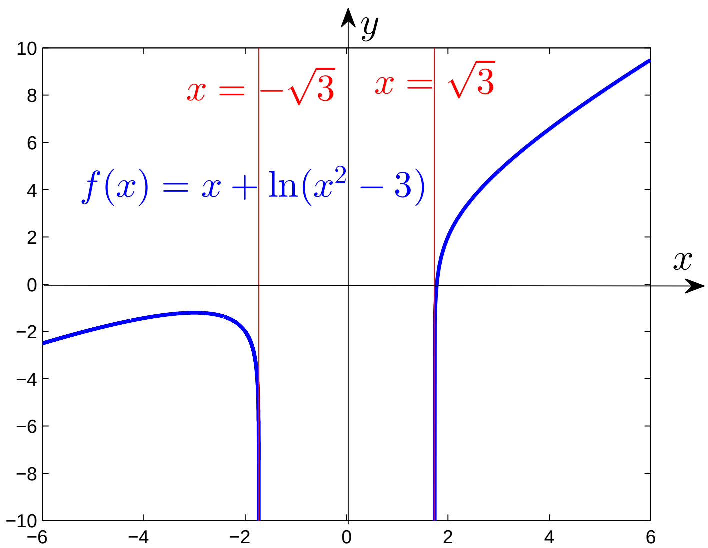
Nu deriverar vi: $f'(x)=1+\frac{2x}{x^2-3}=\frac{x^2+2x-3}{x^2-3}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$

Derivatan har ett enda nollställe $x=-3$. En teckentabell illustrerar vad som sker:

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	Odef	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 6-3$	$\searrow$	$-\infty$ Odef $-\infty$	$\nearrow$	∞

Tydligen har vi ett lokalt maximum i $x=-3$, med $f(-3)=\ln 6-3$.

Vi deriverar igen: $f''(x)=\frac{(2x+2)(x^2-3)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2-3)^2}=\frac{-2(x^2+3)}{(x^2-3)^2}$.
Detta innebär att $f''(x)$ är negativ i hela definitionsmängden, så grafen är konkav (concave down) i båda de intervall där f är definierad.



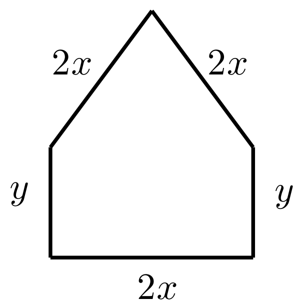
Svar: $\mathcal{D}_\mathbf{f}=(-\infty,-\sqrt{\mathbf{3}})\cup(\sqrt{\mathbf{3}},\infty)$, $\mathcal{V}_\mathbf{f}=(-\infty,\infty)$, **lokal maximipunkt** $\mathbf{x=-3}$,

asymptoter $\mathbf{x=\pm\sqrt{3}}$, **konkav både i** $(-\infty,-\sqrt{3})$ **och i** $(\sqrt{\mathbf{3}},\infty)$.

MATEMATIK
Chalmers

---

5. Vi kan kalla de lika långa sidorna för x, men av praktiska skäl väljer vi att kalla dem $2x$. De återstående rektangelsidorna kallar vi y.



Femhörningens area A består av triangelarean som enligt areasatsen är $\frac{1}{2}(2x)^2 \sin\frac{\pi}{3} = x^2\sqrt{3}$ och rektangelarean $2xy$. Detta ger

$$x^2\sqrt{3} + 2xy = A \;\Rightarrow\; y = \frac{A - x^2\sqrt{3}}{2x}$$

och den omkrets vi vill minimera blir

$$f(x) = 6x + 2y = (6 - \sqrt{3})x + \frac{A}{x},\; 0 < x < \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$$

(den övre gränsen för x får man om $y = 0$, då är det inte längre en femhörning).

För att söka minimum deriverar vi:

$$f'(x) = 6 - \sqrt{3} - \frac{A}{x^2}$$

Enda nollstället är $x_0 = \sqrt{\frac{A}{6-\sqrt{3}}}$, med derivatans teckenväxling $-0+$, dvs ett lokalt minimum som också är globalt. Räknar man ut den minimala omkretsen så får man, efter förenkling (ej nödvändigt):

$$f(x_0) = \mathbf{2\sqrt{A}\sqrt{6-\sqrt{3}}}$$

6. a) Om vinkeln mellan vektorerna är α, så är (då $|\cos\alpha| \leq 1$)
$|\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}||\cos\alpha| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ **Sant.**
OBS! På grund av ett skrivfel kom det att stå $|\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{u}|$ på tesen. Då blir påståendet **falskt**: ta t. ex. $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. Då är $VL = |u| \cdot 2|u||\cos 0| = 2|\boldsymbol{u}|^2$, $HL = |u|^2$, så |VL>HL|.

b) Derivatan $f'(x) = 4(x^3+1)$ har ett enda nollställe $x = -1$, funktionen avtar strängt från ∞ till ett minimum i $x = -1$ och växer därefter strängt mot ∞. Därav förstår vi att grafen kan ha högst två skärningspunkter med x-axeln. **Falskt.**

c) f uppfyller villkoren för medelvärdessatsen på $[-b, b]$: kontinuerlig på $[-b, b]$, deriverbar i $(-b, b)$. Då finns enligt medelvärdessatsen ett $c \in (-b, b)$ så att $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(-b)}{b - (-b)}$, vilket är lika med $\dfrac{f(b)}{b}$, eftersom $f(-b) = -f(b)$ (udda funktion). **Sant.**

7. Se Adams!