

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från hösten 2014 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 7/1.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/1415/

Examinator: Lennart Falk.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

- a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 5 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 8z = 9 \end{cases}$$

- b) Beräkna derivatan av $\frac{1}{(f(x))^2 + 1}$ i punkten $x = 4$, (2p)
då $f(4) = 1$, $f'(4) = -4$.

- c) Bestäm inversa funktionen till funktionen $f(x) = x^2 - 4x$ definierad (2p)
för $x \leq 2$, och ange inversens definitionsmängd.

- d) Bestäm $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$. (2p)

- e) Beräkna följande gränsvärden: (2p)

i. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{10}}$

- f) Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som är parallell med $\mathbf{w}$ och sådan att $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ är (2p)
vinkelrät mot $\mathbf{w}$, när $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dvs bestäm den
ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w}$).

Var god vänd!

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Linjen L_1 går genom punkterna $A = (3, -3, 4)$ och $B = (2, -1, 3)$, och linjen L_2 går genom punkterna $C = (3, 0, 2)$ och $D = (-3, 6, 0)$. (8p)
- a) Beräkna avståndet från punkten C till linjen L_1 .
 - b) Linjerna L_1 och L_2 har en skärningspunkt, bestäm den!
 - c) Bestäm en ekvation för planet som innehåller linjerna L_1 och L_2 .
3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$. Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Ta också reda på var funktionen är konvex och konkav (concave up/down). (6p)
4. Bestäm definitionsområdet och värdemängden för funktionen $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln(x+1)$. (6p)
5. Låt $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{om } x < 0 \\ \arctan x - \frac{\pi}{2} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$ (6p)
- Visa att $f(x)$ är inverterbar. Om inversen är f^{-1} , bestäm också $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.
6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. (6p)
- Svaren ska motiveras.**
- Högst 2 poäng per fråga, bara svaret "sant" eller "falskt" ger ingen poäng.
- a) Triangeln med hörn i punkterna $(3, -2, -1)$, $(2, -3, 1)$ och $(5, -2, 3)$ är rätvinklig.
 - b) Funktionen $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, antar bara två värden. (Undersök derivatan!)
 - c) Att ett polynom $p(x)$ har ett *nollställe* $x = a$ av *ordning* n (där n är ett heltal ≥ 1) betyder: $p(x) = (x - a)^n q(x)$, där $q(x)$ är ett polynom med $q(a) \neq 0$. Påstående: om $p(a) = 0$ och $p'(a) = 0$, så kan nollstället $x = a$ ha *samma ordning* för $p(x)$ och $p'(x)$.
7. a) Skriv det gränsvärde som definierar *derivatan* av en funktion f i en punkt x . (2p)
- b) Bevisa att om en deriverbar funktion f definierad i intervallet (a, b) har ett maximum i en punkt $c \in (a, b)$, så är $f'(c) = 0$. (4p)