

MATEMATIK
Chalmers

Lösningar till tentan för TMV125 2015-01-05

1. Till denna uppgift skulle endast svar, inte lösningar lämnas in. Här kommer i alla fall korta lösningar.

- a) Den utökade koefficientmatrisen för systemet övergår genom radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Härav framgår lösningen.

Svar: $\mathbf{x} = -5, \mathbf{y} = 0, \mathbf{z} = 3$

- b) Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(f(x))^2 + 1} \Big|_{x=4} = \frac{-1}{((f(x))^2 + 1)^2} 2f(x)f'(x) \Big|_{x=4} = \frac{-1}{((f(4))^2 + 1)^2} 2f(4)f'(4)$$

Med $f(4) = 1, f'(4) = -4$ får vi:

Svar: 2

- c) Lös ut x ur ekvationen $y = f(x)$. Vi får då $x = 2 \pm \sqrt{4 + y}$. Eftersom $x \leq 2$ måste vi välja minustecknet. Om vi presenterar inversen som funktion av x , har vi

$$\mathbf{Svar:} \quad \mathbf{f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4 + x}, \quad D_{f^{-1}} = [-4, \infty)}$$

- d) $y = \arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) \iff \cos y = \cos(-\frac{\pi}{3}), 0 \leq y \leq \pi \iff y = \frac{\pi}{3}$

Svar: $\frac{\pi}{3}$

- e) i. Med $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$ har vi både $f(x) \rightarrow 0$ och $g(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, så vi kan använda l'Hôpitals regel.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin x}{-1} \rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow \frac{\pi}{2}. \text{ Enligt l'Hôpitals regel har den ursprungliga}$$

kvoten samma gränsvärde.

$$\text{Alternativt: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Svar: 1

$$\text{ii. } \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{10}} = \left(\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{10}} \rightarrow (e^5)^{\frac{1}{10}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Svar: $\sqrt{e}$

- f) $\mathbf{u}$ parallell med $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{u} = t\mathbf{w} \text{ för något reellt tal } t$$

$\mathbf{v} - \mathbf{u}$ vinkelrät mot $\mathbf{w}$:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \bullet \mathbf{w} = 0 \iff (\mathbf{v} - t\mathbf{w}) \bullet \mathbf{w} = 0 \iff \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} - t\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} = 0 \iff t = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}$$

$$\text{Därmed är } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} \mathbf{w} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Svar:} \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

2. a) Avståndet är

$$\frac{|\vec{AC} \times \vec{AB}|}{|\vec{AB}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$$

Svar: Avståndet är $\sqrt{\frac{7}{3}}$

b) Ställ upp linjernas ekvationer i parameterform (använd $\vec{AC}$ och $\frac{1}{2}\vec{CD}$ som riktningsvektorer):

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-s \\ -3+2s \\ 4-s \end{pmatrix}$$

$$L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3t \\ 3t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

Linjernas eventuella skärningspunkt är lösning till det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3-s &= 3-3t \\ -3+2s &= 3t \\ 4-s &= 2-t \end{cases}$$

Vi ser då att det finns en lösning $s = 3$, $t = 1$, vilket svarar mot en och samma punkt vid insättning i respektive linjes ekvationer, nämligen $(0, 3, 1)$.

Svar: Skärningspunkten är $(0, 3, 1)$

c) Vi har redan en normalvektor till planet: $\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Då vet vi att planet har en ekvation av typen $x + 2y + 3z = D$. Insättning av vilken som helst av de fyra punkterna ska ge D , kontrollera gärna alla! Man får $D = 9$

Svar: planet har ekvationen $x + 2y + 3z = 9$

3. Vi konstaterar att vår funktion $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ är definierad för alla $x > 0$. Det är lätt att se att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Eftersom $f(x) = \frac{1 - 4\sqrt{x}}{2x}$, så kan vi se att täljaren går mot 1 och nämnaren mot 0^+ då $x \rightarrow 0^+$. Alltså: $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow 0^+$.

Vi undersöker derivatan och dess teckenvariation:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} = x^{-2}(-\frac{1}{2} + \sqrt{x})$$

Derivatans enda nollställe är tydligen $x = \frac{1}{4}$. För översikt och slutsatser gör vi en teckentabell:

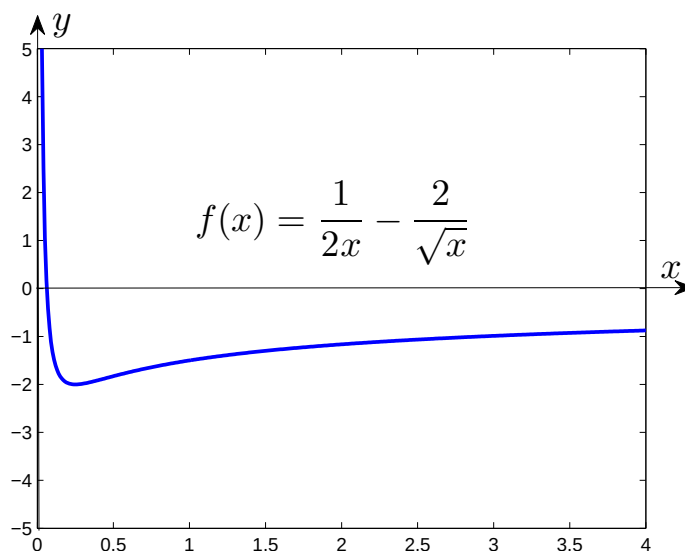
x	0		$\frac{1}{4}$		∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	∞	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Funktionen har en enda lokal (och global) extrempunkt: $x = \frac{1}{4}$ är lokalt (och globalt) minimum. Värdemängden är $\mathcal{V}_f = [-2, \infty)$. Asymptoter är $x = 0$ och $y = 0$ (dvs koordinataxlarna).

Vi undersöker också andraderivatan:

$$f''(x) = x^{-3} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{2}x^{-3}(\frac{2}{3} - \sqrt{x})$$

Den växlar tecken från positiv till negativ i $x = \frac{4}{9}$, vilket betyder att $x = \frac{4}{9}$ är inflexionspunkt, och att funktionen är konvex till vänster och konkav till höger om denna punkt.



Svar: Asymptoter: $x = 0$ och $y = 0$, lokal minimipunkt: $x = \frac{1}{4}$, f är konvex i $(0, \frac{4}{9})$, konkav i $(\frac{4}{9}, \infty)$.

4. Eftersom logaritmen bara existerar för positiva tal, så är f definierad då $-1 < x < 0$ och då $0 < x < \infty$, dvs definitionsmängden är $\mathcal{D}_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

Vi konstaterar att $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^+$ och då $x \rightarrow \infty$, samt att $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^-$ och då $x \rightarrow -1^+$.

För att ta reda på funktionens variationer i övrigt, behöver vi dess derivata:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2(x+1)} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x^2(x+1)}$$

Derivatans nollställen är alltså $x = -\frac{1}{2}$ och $x = 1$. En teckentabell med alla fakta vi funnit:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		∞
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2 - \ln 4$	$\searrow$	$-\infty / +\infty$	$\searrow$	$1 + \ln 4$	$\nearrow$	0

De lokala extremvärdena har förenklats en aning: lokalt maximum $-2 + 2 \ln \frac{1}{2} = -2 - 2 \ln 2 = -2 - \ln 2^2$ samt lokalt minimum $1 + 2 \ln 2 = 1 + \ln 2^2$. Av funktionens kontinuitet följer att den antar alla värden i intervallen $(-\infty, -2 - \ln 4]$ och $[1 + \ln 4, \infty)$.

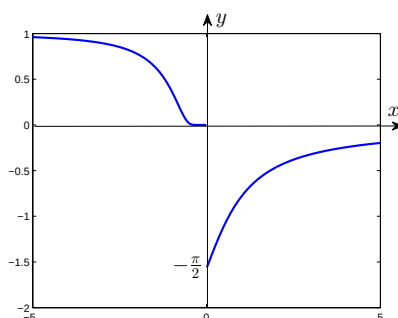
Svar: $\mathcal{D}_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$, $\mathcal{V}_f = (-\infty, -2 - \ln 4] \cup [1 + \ln 4, \infty)$

$$5. f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{om } x < 0 \\ \arctan x - \frac{\pi}{2} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

Vi deriverar:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{om } x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

Härav ser vi att derivatan är negativ för negativa x , positiv för positiva x . Vidare är $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ och $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Således är f strängt avtagande från 1 mot 0 i $(-\infty, 0)$ och strängt växande från $-\frac{\pi}{2}$ mot 0 i $(0, \infty)$. Detta illustreras i grafen nedan (behöver egentligen bara göras i stora drag).



Nu inser vi att f är inverterbar från $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, 1)$ till $(-\infty, 0) \cup [0, \infty)$: för varje $y \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, 1)$ har ekvationen $f(x) = y$ exakt en lösning $x \in (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$.

För att beräkna $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$, kan vi använda att $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, om $y = f(x)$. Vi börjar med att ta reda på vilket x som hör till $y = \frac{1}{2}$. Detta y -värde antas för ett negativt x , så vi löser ekvationen $e^{-1/x^2} = \frac{1}{2}$ och finner att $x = -\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$. Så vi har

$$(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \Big|_{x = -\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}}} = \dots = -(\ln 2)^{-\frac{3}{2}}$$

Alternativt kan man invertera f och derivera inversen direkt. Inversen blir:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \tan(x + \frac{\pi}{2}) & \text{om } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} & \text{om } 0 < x < 1 \end{cases}$$

med derivatan

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x + \frac{\pi}{2})} & \text{om } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ -\frac{1}{2x(-\ln x)^{\frac{3}{2}}} & \text{om } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Direkt insättning ger nu } (f^{-1})'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{(-\ln \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(\ln 2)^{\frac{3}{2}}} = -(\ln 2)^{-\frac{3}{2}}$$

6. a) Bilda vektorer av de tre sidorna, ta skalärprodukten mellan dessa två och två. Om någon av produkterna blir noll, har vi rät vinkel mellan motsvarande sidor i triangeln. Så blir det också om man tar de sidor som har punkten $(2, -3, 1)$ gemensam, så vinkeln i det hörnet är rät. **Sant.**
- b) Derivera och förenkla derivatan. Vi får $f'(x) = 0$ för alla $x \neq 0$. Det innebär att f är konstant i vardera intervallet $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Då $f(-1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ och $f(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, så är värdena olika i dessa två intervall, funktionen har bara dessa två värden. **Sant.**
- c) Antag att $p(x)$ har ett nollställe $x = a$ av ordning n . Då kan vi alltså skriva $p(x) = (x - a)^n q(x)$, där $q(x)$ är ett polynom med $q(a) \neq 0$. Deriverar vi så får vi $p'(x) = n(x - a)^{n-1} q(x) + (x - a)^n q'(x) = (x - a)^{n-1} (nq(x) + (x - a)q'(x)) = (x - a)^{n-1} q_1(x)$, där $q_1(x) = nq(x) + (x - a)q'(x)$ är ett polynom. Här blir $q_1(a) = nq(a) \neq 0$, vilket innebär att $p'(x)$ har nollställe av ordning $n - 1$ i $x = a$, inte av ordning n . **Falskt.**

7. Se Adams!