

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från hösten 2014 inkluderas.)

Resultat meddelas via Ladok senast cirka tre veckor efter tentamenstillfället.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv125/1415/ eftermiddagen den 26/8. Om granskning, se hemsidan under "Tentamensrutiner".

Examinator: Lennart Falk.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

a) Ange värdemängden för funktionen $f(x) = \sqrt{5 + 4 \cos x}$. (2p)

b) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases}$$

får oändligt många lösningar.

c) Bestäm den vektor $\mathbf{u}$, som är den ortogonala projektionen av vektorn (2p)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ på vektorn } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d) Funktionen $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^3}$ är inverterbar för $x > -1$. (2p)
Bestäm $(f^{-1})'(\ln 3)$.

e) Beräkna följande gränsvärden: (2p)

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin x}$

f) Ange det eller de intervall där funktionen $f(x) = \arctan(x^2)$ är *konvex* (2p)
(Adams: *concave up*).

Var god vänd!

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Planet π innehåller punkten $(5, 1, 1)$ och vinkelrät mot de båda planen $2x + y - 2z = 2$ och $x + 3z = 4$. (8p)

- a) Bestäm en ekvation för planet π .
- b) Den räta linjen genom punkterna $(0, -1, 1)$ och $(1, -1, 3)$ skär planet π i en punkt. Vilken?
- c) Beräkna (den spetsiga) vinkeln mellan linjen i (b) och planet π .

3. Undersök funktionen $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ och skissera dess graf. Ange speciellt eventuella lokala maxima/minima och asymptoter (konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.) (6p)

4. Bestäm värdemängden för funktionen (6p)

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \sin \frac{3}{x+2} & \text{då } x < -2 \\ \frac{x^2-3}{x+2} & \text{då } x > -2 \end{cases}$$

5. Låt $P = (s, t)$ vara en punkt på kurvan $y = \frac{x}{x+1}$, $x \geq 0$. Normalen till kurvan i punkten P skär x-axeln i punkten Q . För vilket val av P blir arean av triangeln med hörn i P , Q och $R = (s, 0)$ så stor som möjligt? (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. (6p)

Svaren ska motiveras.

Högst 2 poäng per fråga, bara svaret "sant" eller "falskt" ger ingen poäng.

- a) Funktionen $f(x) = \ln |\ln |x||$ är definierad för alla $x \neq 0$.
- b) Om $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är tre vektorer i ett och samma plan så gäller att $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.
- c) Det existerar en funktion $f(x)$ sådan att $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ och $f'(x) > 1$ för alla reella tal x .

7. a) Bevisa att $\ln x \leq x - 1$ för alla $x > 0$. (4p)

- b) Formulera medelvärdessatsen (med alla förutsättningar). (2p)