MATEMATIK
Chalmers

Lösningar till tentan för TMV125 2015-08-26

---

1. Till denna uppgift skulle endast svar, inte lösningar lämnas in.

   a) $\mathcal{V}_f = [1, 3]$

   b) $a = -4,\ b = 2$

   c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

   d) $\dfrac{3}{2}$

   e) i. $-\dfrac{1}{2}$

      ii. 1

   f) Konvex i $(-\frac{1}{3^{1/4}}, \frac{1}{3^{1/4}})$, konkav i $(-\infty, -\frac{1}{3^{1/4}})$ och i $(\frac{1}{3^{1/4}}, \infty)$ (slutna intervall också OK).

2. a) Planets normalvektor måste vara vinkelrät mot de givna planens normalvektorer, vi kan därför ta vektorprodukten som normalvektor till π:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Planet har då en ekvation av typen $3x - 8y - z = D$, och insättning av punkten $(5, 1, 1)$ ger $D = 6$. Svar: $\mathbf{3x - 8y - z = 6}$

   b) En vektor längs linjen är

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   så en parameterekvation för linjen är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Vi har alltså $x = t,\ y = -1,\ z = 1 + 2t$ vilket sätts in i planets ekvation för att få skärningspunkten:

$$3t - 8(-1) - (1 + 2t) = 6 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -1,\ y = -1,\ z = -1$$

   Svar: $(\mathbf{-1, -1, -1})$

   c) Vinkeln α mellan linjens riktningsvektor och planets normalvektor bestäms:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{74}}$$

   Vinkeln mellan linjen och själva planet är då $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

$$\text{Svar: } \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} - \arccos\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{370}}} = \arcsin\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{370}}}$$

3. Vår funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ är definierad för alla $x \neq 0$. Vi undersöker alla intressanta gränsvärden:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad f(x) \to \infty \text{ då } x \to 0^+$$

och det svårare fallet $x \to 0^-$ får vi med variabelbytet $t = -\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{t\to\infty} -te^{-t} = 0$$

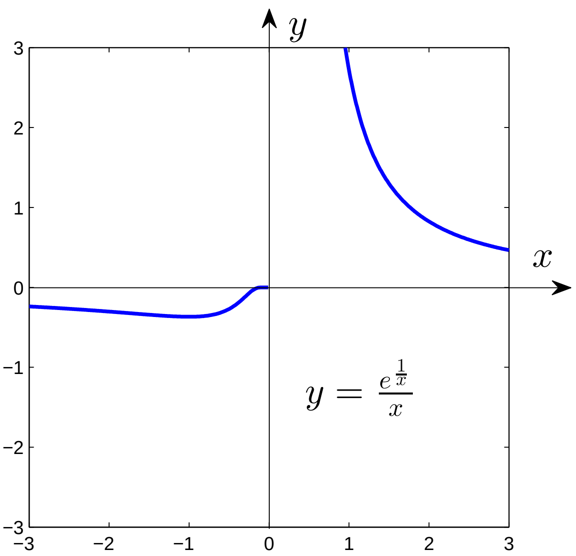
Vi undersöker derivatan och dess teckenvariation:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}(1+x)$$

Derivatans enda nollställe är tydligen $x = -1$. För översikt och slutsatser gör vi en teckentabell:

x	$-\infty$		-1		0		∞
$f'(x)$		-	0	$+$	odef	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	odef	$\searrow$	0

Funktionen har en enda lokal (och global) extrempunkt: $x = -1$ är lokalt (och globalt) minimum. Värdemängden är $\mathcal{V}_f = [-e^{-1}, 0) \cup (0, \infty)$.
Asymptoter är $x = 0$ (då $y \to 0^+$) och $y = 0$ (då $x \to \pm\infty$), alltså x-axeln och positiva y-axeln.



Svar: Asymptoter: $\mathbf{x = 0}$ och $\mathbf{y = 0}$, lokal minimipunkt: $\mathbf{x = -1}$.

4. Vi studerar funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \sin \frac{3}{x+2} & \text{då} \quad x < -2 \\ \\ \frac{x^2-3}{x+2} & \text{då} \quad x > -2 \end{cases}$$

Fallet $x < -2$:
Då värdemängden till sinus är $[-1, 1]$ medför detta att $f(x)$ kommer att variera mellan 2 och 4 då $x < -2$.

Fallet x>-2: Vi har att

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

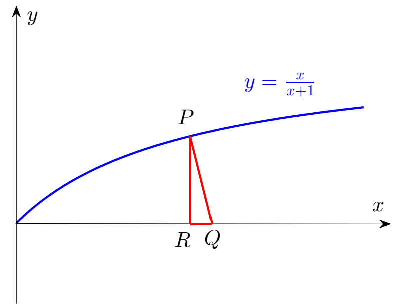
Därmed finns inget största värde. Men det kan finnas ett minsta, så vi deriverar:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$$

Enda nollstället för derivatan då $x > -2$ är tydligen $x = -1$, som då måste vara ett lokalt minimum. Då $f(-1) = -2$ och funktionen är kontinuerlig för $x > -2$, så antas i detta intervall alla värden i $[-2, \infty)$. Värden för $x < -2$ inryms helt i detta intervall.

Svar: $\mathcal{V}_{\mathbf{f}} = [\mathbf{-2}, \infty)$

5. Vi tittar på situationen i en figur.



Vi behöver normalens ekvation, och därför derivatan:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Normalens riktningskoefficient är $-1/f'(s) = -(s+1)^2$, så dess ekvation är

$$y - \frac{s}{s+1} = -(s+1)^2(x-s)$$

Sätt $y = 0$ för att få x-koordinaten för Q:

$$-\frac{s}{s+1} = -(s+1)^2(x-s) \quad \Rightarrow \quad x = s + \frac{s}{(s+1)^3}$$

Eftersom $R = (s, 0)$ så är $QR = \frac{s}{(s+1)^3}$ och $PR = \frac{s}{s+1}$. Triangelarean blir

$$A(s) = \frac{s^2}{2(s+1)^4}, \qquad A(s) \Rightarrow 0 \text{ då } x \to 0^+ \text{ och då } x \to \infty$$

Eftersom A är positiv och begränsad, måste då finnas ett maximum, där derivatan är noll.

$$A'(s) = \frac{2s(s+1)^4 - 4s^2(s+1)^3}{2(s+1)^8} = \cdots = \frac{s(1-s)}{(s+1)^5}$$

Enda positiva nollstället är $s = 1$, som alltså ger oss vårt maximum. Svar: $\mathbf{P} = (\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$

MATEMATIK
Chalmers

---

6. a) Vi har $\ln 1 = 0$, och i uttrycket ingår att logaritmera detta, vilket inte går. **Falskt.**

   b) Vektorn $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ är vinkelrät mot det plan som $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ ligger i, och därmed också vinkelrät mot vektorn $\boldsymbol{c}$. Skalärprodukten mellan två vinkelräta vektorer är noll. **Sant.**

   c) Då $f(x)$ är deriverbar för alla reella x, så är den också kontinuerlig för alla reella x. Vi kan använda medelvärdessatsen på intervallet $[1, 3]$ och får för något tal $c \in (1, 3)$

$$f(3) - f(1) = f'(c)(3 - 1) \quad \Longleftrightarrow 0 - (-2) = f'(c)(3 - 1) \quad f'(c) = 1$$

   Men $f'(x) > 1$ för alla x, så detta är omöjligt! **Falskt.**

7. Se Adams!