

TMV125 Inledande matematik V/AT, ht 14

Alla detaljerade lärmål från vecko-PM 1-7.

Lay 1.1-1.2 : Linjära ekvationssystem

Homogena, inhomogena system.

Eliminationsmetoden, entydig lösning, parameterlösning

Mål: Att behärska eliminationsmetoden (elementära radoperationer).

Att kunna förklara varför metoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär.

Att kunna förklara hur de olika typerna av lösningsmängder uppkommer och hur de kan beskrivas.

10.1 Analytisk geometri i tre dimensioner

Innehåll:

Parvis vinkelräta, Cartesiskt koordinatsystem, högerorienterat koordinatsystem, avståndsformeln. I kursen ingår inte avsnitten "Euclidean n-space" och "Describing Sets in the Plane, 3-Space and n-Space".

Mål: Att kunna avståndsformeln (egentligen bara Pythagoras sats) och att veta vad orden ovan betyder.

10.2 Vektorer

Innehåll:

Vektor, riktad sträcka, längd, riktning, vektoraddition, multiplikation med skalär, standard bas, linjärkombination, Ortsvektor, enhetsvektor, komponent, skalärprodukt, skalärprojektion, vektorprojektion. Stycket Hanging Cables and Chains ingår inte, då det bygger på ett mellanliggande kapitel om integraler.

Mål: Du skall veta vad orden ovan betyder. Du skall kunna utnyttja att en vektor inte har ett fixt läge i rummet. Du skall kunna utföra de vektoroperationer som presenteras i kapitlet. Du skall kunna härleda den geometriska tolkningen av skalärprodukt (Sats 10.1). Du skall kunna beräkna projektionen av en vektor på en annan. Du skall kunna dela upp en vektor i två vinkelräta komponenter enligt exempel 5 (du bör behärska båda metoderna).

10.3 Vektorprodukt, kryssprodukt

Innehåll:

Vektorprodukt, skalär trippelprodukt, Formler för beräkning av dessa produkter, 2- och 3-radiga determinanter, determinantuttrycken för vektorprodukt och skalär trippelprodukt,

Mål: Du skall kunna återge såväl definitioner som beräkningsformler för vektorprodukt och skalär trippelprodukt. Du skall kunna använda räknereglerna för vektorprodukten vid problemlösning.

10.4 Plan och linjer

Innehåll:

Plans ekvation på punkt-normalform och på standardform. Linjes ekvation på vektor-parametrisk form, skalär-parametrisk form och standardform. Avstånd mellan punkt och plan, punkt och linje, linje och linje.

Mål: Du skall kunna förklara varför ett plan eller en linje beskrivs av ekvationer enligt ovan. Du skall kunna bestämma ekvationer för plan och linjer som beskrivs geometriskt på olika sätt. Du skall kunna beräkna avstånd enligt ovan, inte genom att kunna formler utantill, lär dig hellre idéerna bakom formlerna.

1.1-1.5, Gränsvärden och kontinuitet

Innehåll:

Gränsvärde, tvåsidiga och ensidiga gränsvärden, oändliga gränsvärden, gränsvärden i oändligheten, gränsvärdesregler, kontinuitet, vänsterkontinuitet, högerkontinuitet, kontinuitet på intervall. Satser om kontinuerliga funktioner.

Mål: Att kunna ge och använda informella (och i någon mån formella; avsnitt 1.5) definitioner av olika typer av gränsvärden, att kunna gränsvärdesreglerna och kunna använda dem i problemlösning.

Att kunna definiera de olika kontinuitetsbegreppen och förklara med hjälp av exempel. Att kunna tillämpa satserna om kontinuerliga funktioner i problemlösning.

2.1 - 2.2. Derivatans definition.

Innehåll:

Definition av deriverbarhet och derivata.
definition av tangent och normal till kurva.
Differentialer.

Mål: Att kunna definitionerna och att kunna ge exempel på funktioner som är deriverbara och sådana som inte är det (i en viss punkt).
Att kunna bestämma tangent och normal till olika funktioner.
Att kunna beräkna derivatan av vissa funktioner enbart med hjälp av derivatans definition.
Att känna till begreppet differential.

2.3 - 2.4. Deriveringsregler.

Innehåll:

Satsen: Deriverbarhet medför kontinuitet.(sats 2.1)
Deriveringsregler (satserna 2.1 - 2.6): *Summa, produkt, kvot, kedjeregeln*

Mål: Att kunna använda deriveringsreglerna vid problemlösning.
Att kunna bevisa att deriverbarhet medför kontinuitet.
Att kunna bevisa produktregeln.
Att kunna bevisa kedjeregeln.

2.5 Trigonometriska funktioners derivator.

Innehåll:

Gränsvärde för $\frac{\sin \theta}{\theta}$.
Derivator för de grundläggande trigonometriska funktionerna.

Mål: Att kunna bevisa gränsvärde för $\frac{\sin \theta}{\theta}$.
Att kunna härleda derivatan av $\sin x$.
Att kunna derivera trigonometriska funktioner.

2.6. Derivator av högre ordning.

Innehåll:

Definition av högre ordningens derivator.

Mål: Derivera mera.

2.7. Användning av derivator

Innehåll:

Approximering av små förändringar.

Mål: Att få en känsla för derivatans innebörd i tillämpningar.

2.8 Medelvärdessatsen.

Innehåll:

Begreppen växande och avtagande funktion.

Samband mellan derivatans tecken och funktionens växande/avtagande.

Begreppet stationär punkt (critical point).

Sambandet mellan stationära punkter och extremvärden för funktionen.

Medelvärdessatsen.

Mål: Att kunna avgöra om en funktion är växande/avtagande i ett intervall.

Kunna formulera och bevisa satsen om sambandet mellan stationära punkter och extremvärden för funktionen. (Sats 2.14)

Kunna *formulera* medelvärdessatsen (2.11) och *bevisa* satserna som följer av den: 2.12, 2.13.

2.9 Implicit derivering.

Innehåll:

Deriveringsmetoden implicit derivering.

Mål: Att kunna tillämpa metoden i enkla situationer.

3.1 Invers funktion

Innehåll:

Begreppen injektiv funktion (one-to-one), invers funktion. Inversens derivata.

Mål: Att kunna ge exempel på funktion som är injektiv och kunna förklara hur man kan avgöra att den är det. Att kunna bestämma inversen till en given funktion. Att kunna beräkna inversens derivata med hjälp av sambandet mellan funktionens och inversens derivata.

3.2-3.3 Exponential- och logaritmfunktioner

Innehåll:

Naturliga logaritmen, naturliga exponentialfunktionen. Allmänna logaritmer och exponentialfunktioner. Logaritmlagar och exponentiallagar. Logaritmisk derivering.

Mål: Att kunna definiera logaritm- och exponentialfunktioner. Att kunna rita dessa funktioners grafer. Att kunna tillämpa logaritm- och exponentiallagar i problemlösning. Att kunna utnyttja logaritmering vid derivering (logaritmisk derivering).

3.4 Tillväxthastighet för logaritm- exponential och potensfunktioner

Innehåll:

Olikheten $\ln x \leq x - 1$ och jämförelser mellan logaritm- exponential och potensfunktioner i form av gränsvärden. Exponentiell tillväxt och avtagande.

Mål: Att kunna bevisa olikheten $\ln x \leq x - 1$. Att kunna bevisa att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$. Att kunna använda exponentialfunktioner i tillväxtmodeller.

3.5 Inverser till trigonometriska funktioner

Innehåll:

Definitioner av arcusfunktionerna (inverserna till de trigonometriska funktionerna). Härledningar av deras derivator.

Mål: Att kunna definitionerna av följande funktioner

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ och } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ och } 0 \leq y \leq \pi$$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \text{ och } -\pi/2 < y < \pi/2$$

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y \text{ och } 0 < y < \pi$$

Att kunna deras derivator samt att kunna rita deras grafer.

Att kunna härleda derivatan av $\arcsin x$.

3.6: Hyperboliska funktioner

Innehåll:

Definitioner av de hyperboliska funktionerna och härledningar av deras derivator.

Mål:

Att kunna definitionerna av de hyperboliska funktionerna $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ och $\coth x$.

Att kunna deras derivator samt att kunna rita deras grafer.

Att kunna härleda derivatan av $\sinh x$.

4.1 Relativa ändringshastigheter

Innehåll:

Ändringshastigheter för storheter med inbördes samband.

Mål: Att kunna ställa upp matematiska samband mellan storheter utgående från en beskrivande text samt att med hjälp av derivering (i vissa fall implicit derivering) bestämma ändringshastigheter för dessa storheter. Lösningsgången, som presenteras på sidan 212 är generell vid modellering, även inom andra områden.

4.2 Numerisk ekvationslösning

Innehåll:

Newtons metod och fixpunktmetoden

Mål: Att kunna använda båda metoderna för att lösa ekvationer numeriskt. Använd gärna miniräknare för att testa ideerna.

4.3 Mer om gränsvärden

Innehåll:

Obestämd form och l'Hospitals regler.

Mål: Att kunna tillämpa l'Hospitals regler vid beräkning av gränsvärden. Men låt inte dessa regler ersätta kunskap om de standardgränsvärden och tekniker vi studerat tidigare i kursen, det finns många gränsvärdesberäkningar där l'Hospitals regler inte ger någon hjälp. En god idé är att testa både l'Hospitals regler och annan teknik för att lösa de olika uppgifterna.

4. 4 Extremvärden

Innehåll:

Absoluta och lokala maximum och minimum (extremvärden). Metod för att finna absoluta extremvärden med hjälp av derivatan.

Mål: Att kunna bestämma absoluta och lokala extremvärden till given funktion på såväl slutet och begränsat intervall som på intervall där gränsvärdesberäkning kan vara nödvändig.

4. 4 Extremvärden

Innehåll:

Absoluta och lokala maximum och minimum (extremvärden). Metod för att finna absoluta extremvärden med hjälp av derivatan.

Mål: Att kunna bestämma absoluta och lokala extremvärden till given funktion på såväl slutet och begränsat intervall som på intervall där gränsvärdesberäkning kan vara nödvändig.

4.5 Konvex och konkav funktion, inflektionspunkter

Innehåll:

Begreppen konvex (concave up) och konkav (concave down). Begreppet inflexionspunkt.

Mål: Att kunna utnyttja andraderivatan för att bestämma inflexionspunkter och avgöra om en funktion är konvex eller konkav på ett intervall.

4.6 Grafritning

Innehåll:

Vertikala, horisontella och sneda asymptoter till funktionsgrafer. Kurvritning med hjälp av asymptoter, första derivatan och andraderivatan.

Tillägg: **Sats:** Grafen till $y = f(x)$ har en sned asymptot $y = ax + b$ då $x \rightarrow \infty$ om och endast om $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$. Motsvarande gäller även för asymptoter då $x \rightarrow -\infty$.

Mål: Att kunna bestämma alla asymptoter till en funktion, att kunna avgöra i vilka intervall funktionen är växande eller avtagande, konvex eller konkav, kunna bestämma alla lokala extremvärden och inflexionspunkter och med stöd av allt detta kunna rita funktionens graf. Att själv kunna avgöra med vilken precision en graf behöver ritas för att en viss fråga skall kunna besvaras. Att, i samband med studiet av grafen, kunna bestämma en funktions värdemängd och besvara frågor som: Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = a$? För vilka x är $f(x) > g(x)$?

4.8 Extremvärdesproblem

Innehåll:

”Verkliga problem” där det gäller att finna största eller minsta värdet av något.

Mål: Att kunna ställa upp matematiska samband mellan storheter utgående från en beskrivande text samt att med hjälp av derivering (i vissa fall implicit derivering) bestämma extremvärden. Den blåmarkerade lösningsgången är allmängiltig vid matematisk modellering.