

Befolkningsexplosion.

En vanligt förekommande modell för befolkningstillväxt är den exponentiella:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

där $N(t)$ är antalet individer efter tiden t , i enheten år räknat från nutid ($t = 0$), N_0 den nuvarande befolkningen och a är en konstant årlig tillväxtfaktor. Vi vet ju att tillväxtfaktorn inte är konstant, men vi ska undersöka konsekvenserna av en sådan konstant tillväxthastighet. Just nu (2014) kan vi sätta $N_0 = 7 \cdot 10^9$ och $a = 1,01$, eftersom befolkningen just nu ökar med ca 1 % per år.

Hur mycket är egentligen 7 miljarder människor? Om vi leker med tanken att bygga ett klot av hela mänskligheten tätt sammanpackad, så kan vi anta att genomsnittsmänniskan väger 60 kg. Detta ger en totalmassa av $60 \cdot 7 \cdot 10^9$ kg, bildande ett klot av volymen $V = \frac{m}{\rho} = \frac{60 \cdot 7 \cdot 10^9}{1000} \text{ m}^3$. Vi antar då en medeldensitet lika med vattnets, dvs 1000 kg/m^3 . Vi beräknar nu radien av detta klot:

$$V = \frac{4\pi r_0^3}{3} \Rightarrow r_0 = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 465 \text{ m}$$

Om vi låter tiden gå kommer detta klot att växa med volymen proportionell mot antalet individer, dvs r^3 blir proportionellt mot antalet individer och har samma exponentiella växande som individantalet:

$$r(t)^3 = r_0^3 \cdot 1,01^t$$

Om vi deriverar detta med avseende på tiden får vi:

$$3r(t)^2 \cdot \frac{dr}{dt} = r_0^3 \cdot 1,01^t \cdot \log 1,01 = r(t)^3 \log 1,01 \approx \frac{r(t)^3}{100}$$

Derivatans $\frac{dr}{dt}$ uttrycker hur snabbt vår mänskliga boll växer i radie. Denna expansionshastighet måste förstås ha en fysikalisk gräns, vilket väl borde vara ljusets c . Vilken radie har vår boll när vi nått denna gränshastighet och när inträffat detta? Vi räknar:

$$\frac{dr}{dt} = c \Rightarrow 3r(t)^2 \cdot c = \frac{r(t)^3}{100} \Rightarrow r = 300c$$

Observera att vi nu har tidsenheten år, och om vi därtill väljer längdenheten ljusår, så är $c = 1$ ljusår/år och $r = 300$ ljusår. Vi har alltså en boll av människor som har radien 300 ljusår och vars radie expanderar med ljushastigheten! Men när händer detta? Vi räknar vidare, nu med längdenheten meter (eftersom vi hade det då vi beräknade den ursprungliga radien 465 meter):

$$\begin{aligned} r(t)^3 = r_0^3 \cdot 1,01^t &\Rightarrow 1,01^t = \left(\frac{r(t)}{r_0}\right)^3 = \frac{300 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{465} \\ &\Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{r(t)}{r_0}\right)^3}{\ln 1,01} \approx 10959 \text{ år} \end{aligned}$$

Om ca 11000 år har vi alltså denna fläskiga situation, och det är ju inte längre än tiden tillbaka till den äldre stenåldern. Men som sagt, med konstant tillväxtfaktor kan vi tänka oss ett flertal praktiska problem som uppstår på vägen.