

Modellering av problemet med cellens tillväxt.

Låt massan av cellen vid tiden t vara $m(t)$. Vi gör följande rimliga antaganden:

- Tillväxthastigheten är proportionell mot arean, dvs massans tillväxthastighet är proportionell mot kvadraten på radien: $m'(t) = k_1 r^2$
- Cellens massa är proportionell mot kuben på radien under hela tillväxtprocessen, dvs: $m(t) = k_2 r^3$

Kombinerar vi dessa två samband får vi $m'(t) = k_1 (r^3)^{\frac{2}{3}} = k_1 (\frac{m(t)}{k_2})^{\frac{2}{3}} = k(m(t))^{\frac{2}{3}}$

Vi behöver alltså lösa differentialekvationen med begynnelsevillkor:

$$m'(t) = k(m(t))^{\frac{2}{3}}, \quad m(0) = m_0.$$

För att kunna bestämma värdet på konstanten k behöver vi också det andra villkoret som gavs beträffande tidpunkten för massfördubbling: $m(T) = 2m_0$, vilket kan göras när man har löst differentialekvationen.

Modellering av problemet med det rökiga rummet.

Låt koncentrationen av CO vid tiden t (minuter) vara $y(t)$. Vi vet då att $y(0) = 0$. Förändringshastigheten för $y(t)$ (dvs derivatan) är differensen mellan ett tillskott och ett bortfall. Rummets volym kallas för en stund V och är enligt uppgiften 120m^3 .

- Tillskottet från rökandet är $\frac{0,01 \cdot 0,04}{V}$ procentenheter per minut.
- Bortfallet p g a ventilation är $\frac{0,01y(t)}{V}$ procentenheter per minut.

Detta ger oss

$$y'(t) = \frac{0,01 \cdot 0,04}{V} - \frac{0,01y(t)}{V} = \frac{0,01}{V}(0,04 - y(t))$$

med $V = 120$ har vi alltså begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) = \frac{1}{12000}(0,04 - y(t)), \quad y(0) = 0.$$

För att vara lite sedelärande, så bestämmer vi att avsluta rökandet vid en bestämd tidpunkt, om inte förr så när CO-halten nått den farliga nivån $y_0 = 0,00012$. Då kan vi

nollställa klockan vid denna tidpunkt och kasta bort tillskottstermen:

$$y'(t) = -\frac{1}{12000}y(t), \quad y(0) = y_0.$$

Som sagt, lösningarna på detta och föregående problem kan vi hitta i nästa kurs.