En grafritningsövning.

Vi ska skissera grafen till funktionen $\mathbf{f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}}$. Först konstaterar vi att definitionsmängden är $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Vi kontrollerar alla intressanta gränsvärden av $f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad f(x) \to -\infty \text{ då } x \to 0^-, \quad f(x) \to +\infty \text{ då } x \to +\infty, \quad f(x) \to -\infty \text{ då } x \to -\infty$$

Försök analysera vart och ett av dessa gränsvärden och oegentliga gränsvärden närmare!
För att se om det finns någon sned asymptot gör vi följande gränsvärdesberäkningar:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

Det senaste gränsvärdet klarar vi med variabelbytet $t = -\frac{1}{x}$, varvid $x \to \pm\infty \iff t \to 0$.
Vi får då ett känt gränsvärde:

$$m = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{-t} = -\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = -1$$

Vi har alltså en asymptot $\mathbf{y = x - 1}$ i $x = \pm\infty$. Av ett av de första gränsvärdena ser vi att det också finns en lodrät asymptot $\mathbf{x = 0}$ i $x = -\infty$.

Nu återstår att utreda eventuella lokala extrempunkter. Vi har derivatan

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

vars enda nollställe är $x = -1$, och är negativ i $(-1, 0)$, positiv annars. Detta ger att funktionen har ett lokalt maximum i $x = 1$. Vi kan också konstatera att

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \left[t = \frac{1}{x} \to \infty\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{1+t}{e^t} = 0$$

så positiva x-axeln är en högertangent till kurvan i origo.

När vi ändå håller på, kan vi ju derivera en gång till. Efter förenkling blir det $f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$, som är negativ för negativa x, positiv för positiva x. Vår graf är alltså konkav (concave down) för $x < 0$ och konvex (concave up) för $x > 0$.